Datenverarbeitung im P1-Praktikum

Roger Wolf

24. Oktober 2024

Vorwort

- **Grundlagen zur Datenauswertung** im P1:
  - Statistische & systematische Unsicherheiten
  - Fehlerfortpflanzung
  - Darstellung von Messergebnissen
  - Verträglichkeit von Messergebnissen
  - Parameterschätzung
  - Verträglichkeit von Modellen
- **Vertiefende Ausführungen** (für diejenigen, die es wissen wollen)

  → Freitag 25.10. 16:00 – 17:30 (SR 9-1)
- **Schriftlich und im eigenen Tempo** durch das:
  - Diese Folien auf den Webseiten des P1 [**hier**]
  - Anleitung und Hinweise zum Versuch Datenverarbeitung [**hier**]
  - Textdokumente und Jupyter-notebooks zum ausprobiern [**hier**]

Was macht wissenschafliches Messen aus?

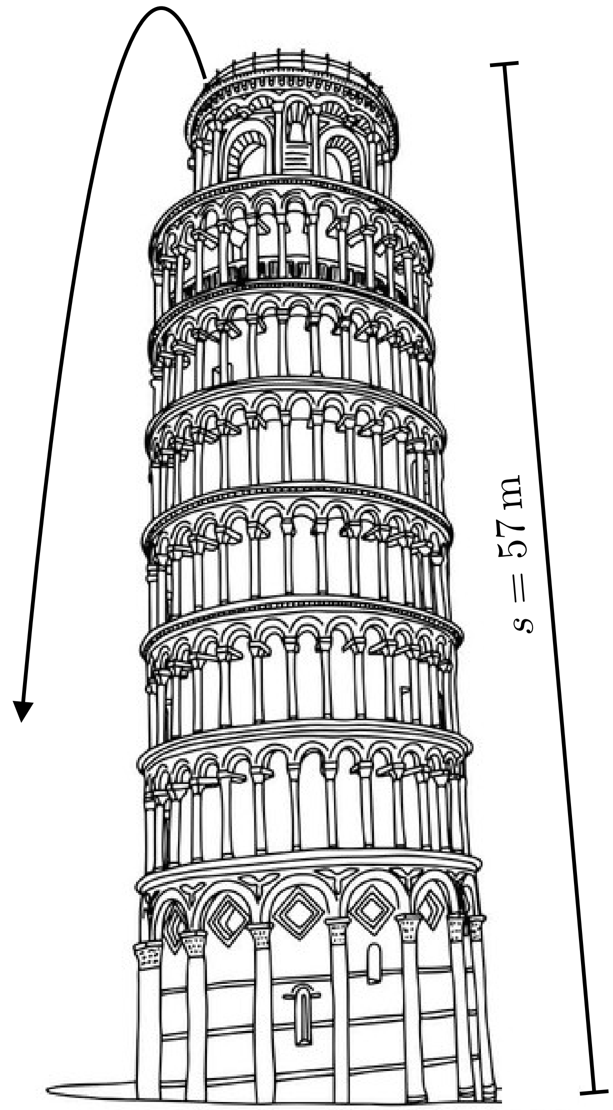
Was macht wissenschafliches Messen aus?

… Reproduzierbarkeit

Messung der Ergbeschleunigung g

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad\qquad g = \frac{2\ell}{t^2}$$

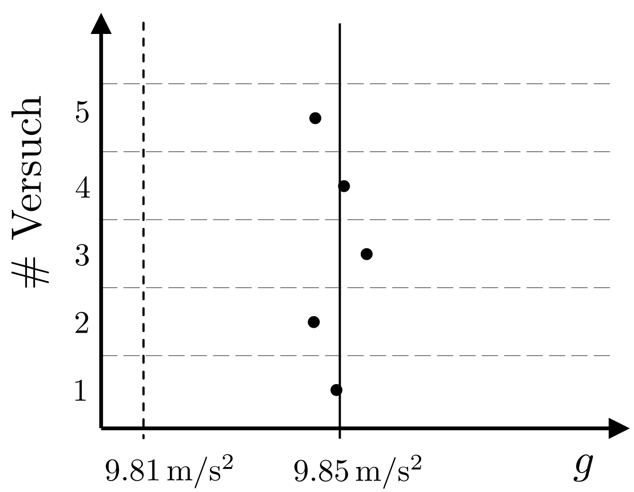
$$g(\ell, t) = \frac{2 \cdot 57\,\mathrm{m}}{(3.40\,\mathrm{s})^2} = 9.86\,\mathrm{m/s^2}$$

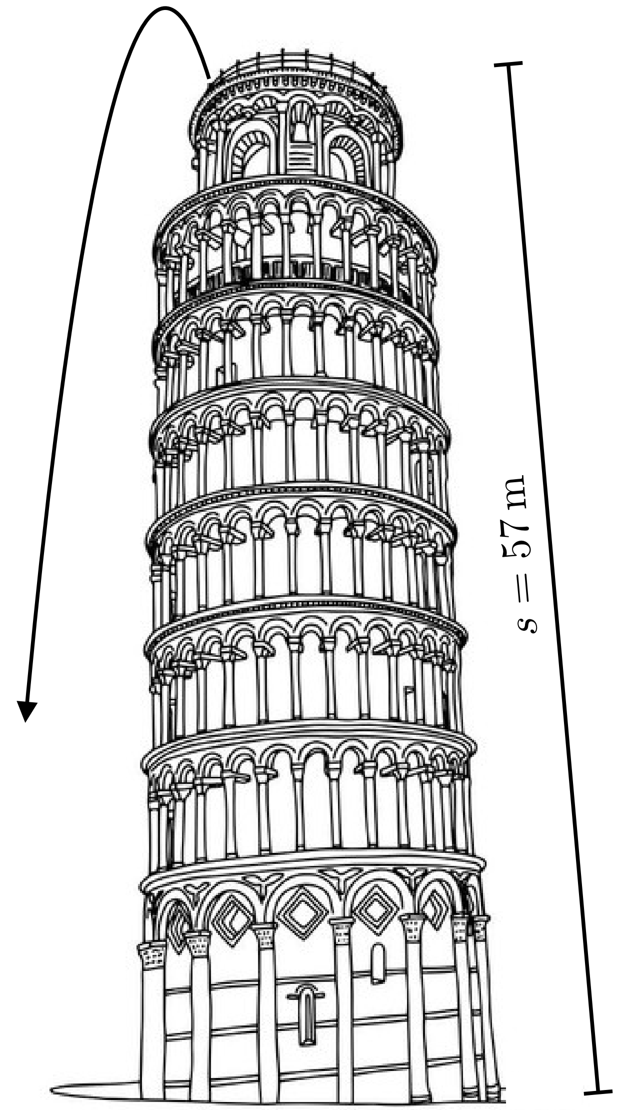


Messung der Ergbeschleunigung g

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}$$

$$g(\ell, t) = \frac{2 \cdot 57\,\mathrm{m}}{(3.40\,\mathrm{s})^2} = 9.86\,\mathrm{m/s^2}$$





Messung und Wahrheit

- **Wissenschaftliches Experiment → nur innerhalb bestimmter Grenzen reproduzierbar (→ Unsicherheiten)**
- Konfidenz- oder Vertrauensintervall
- Ohne zusätzliche Angabe eines Vertrauensintervalls ist jede wissenschaftliche Messung …

Messung und Wahrheit

- **Wissenschaftliches Experiment → nur innerhalb bestimmter Grenzen reproduzierbar (→ Unsicherheiten)**
- Konfidenz- oder Vertrauensintervall
- Ohne zusätzliche Angabe eines Vertrauensintervalls ist jede wissenschaftliche Messung …

W E R T L O S !

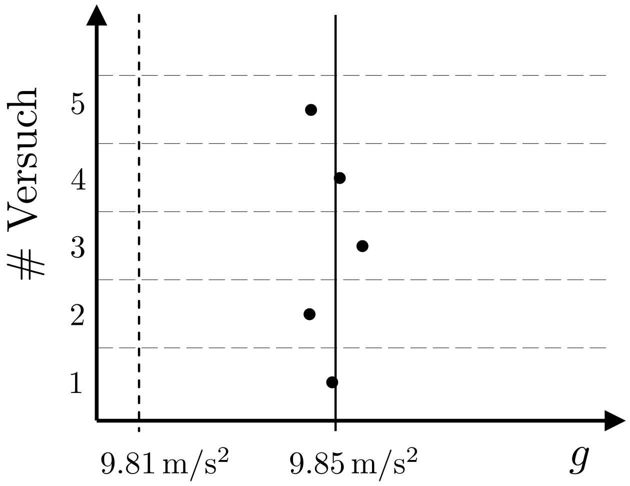
Messung und Wahrheit

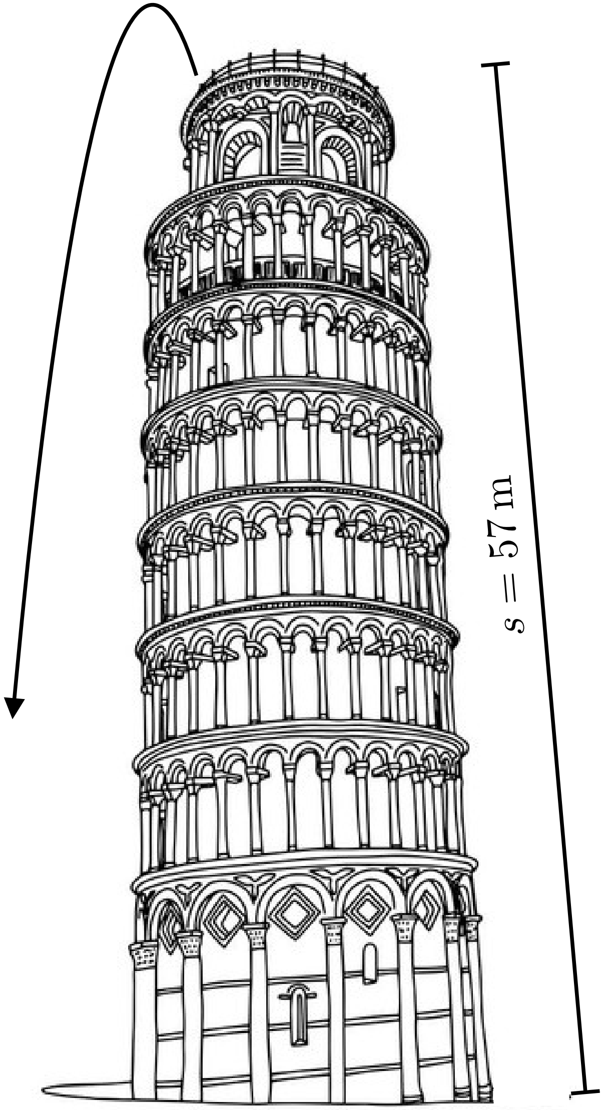
- **Wissenschaftliches Experiment → nur innerhalb bestimmter Grenzen reproduzierbar (→ Unsicherheiten)**
- Konfidenz- oder Vertrauensintervall
- Ohne zusätzliche Angabe eines Vertrauensintervalls ist jede wissenschaftliche Messung …

Kein Messwert ohne Angabe eines Konfidenzintervalls

Statistisch, systematisch, falsch!

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}$$

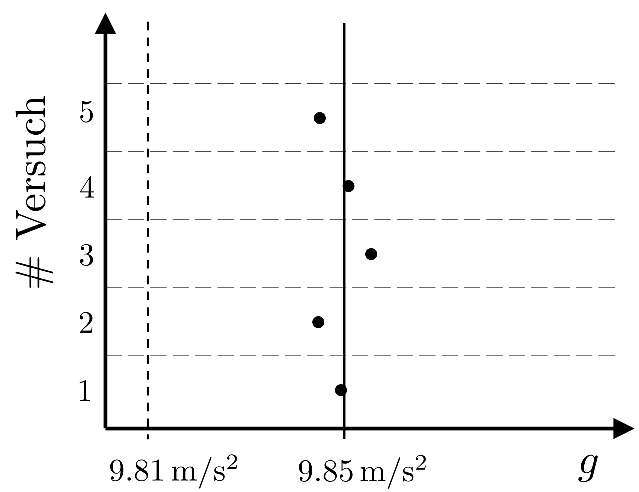


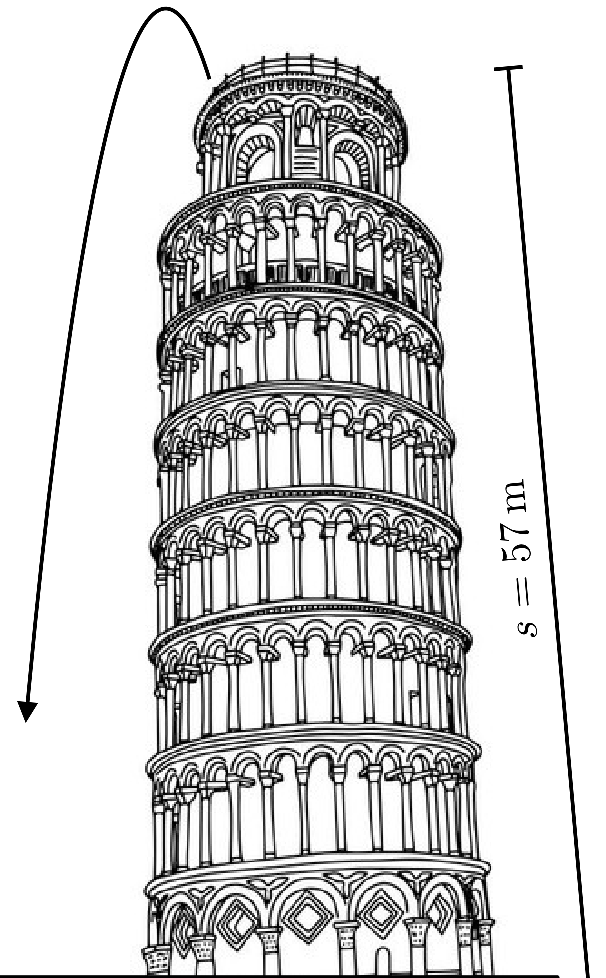


Statistisch, systematisch, falsch!

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}$$

- Reaktionszeit beim Drücken der Stoppuhr unterliegt dem Zufall → **statistische Unsicherheit**.





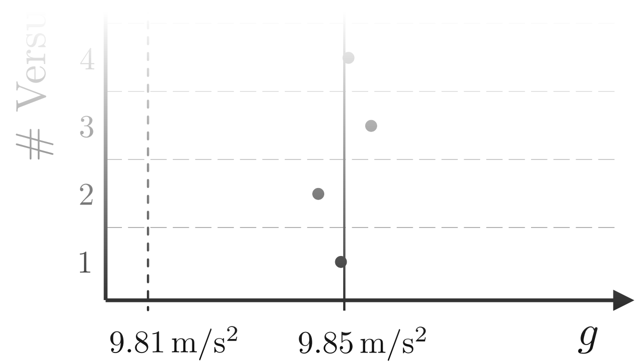
$$g = (9.85 \pm \underbrace{0.01}_{\text{stat.}})\,\mathrm{m/s^2}$$

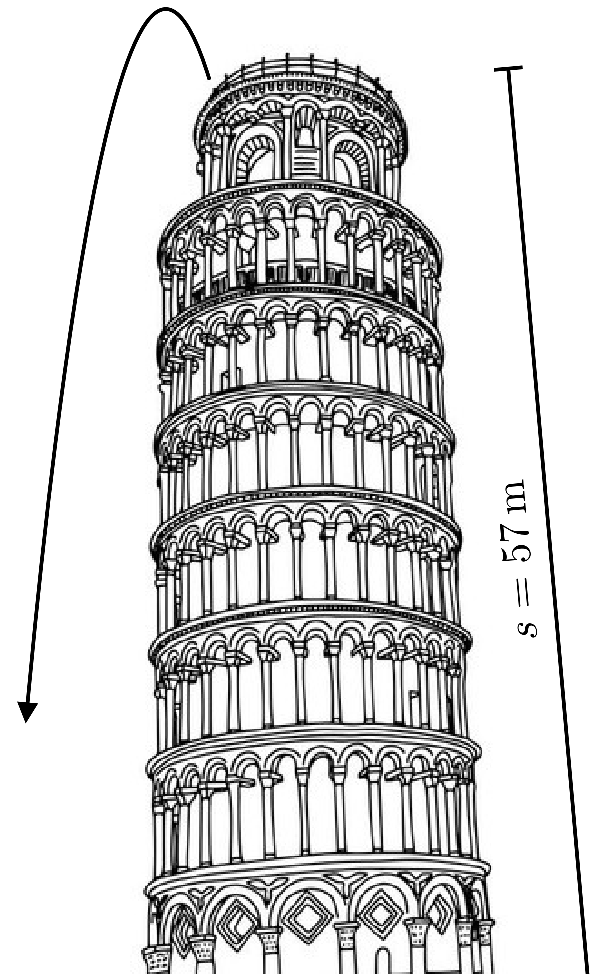
Statistisch, systematisch, falsch!

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}$$

- Reaktionszeit beim Drücken der Stoppuhr unterliegt dem Zufall → **statistische Unsicherheit**.
- Turm vielleicht nicht 57 m, gewiss aber zwischen 54–60 m hoch → **systematische Unsicherheit**.

Link



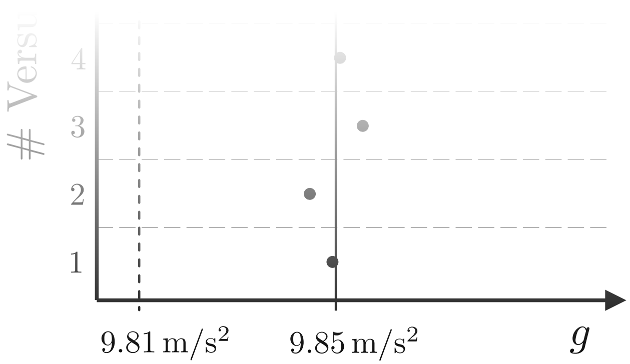


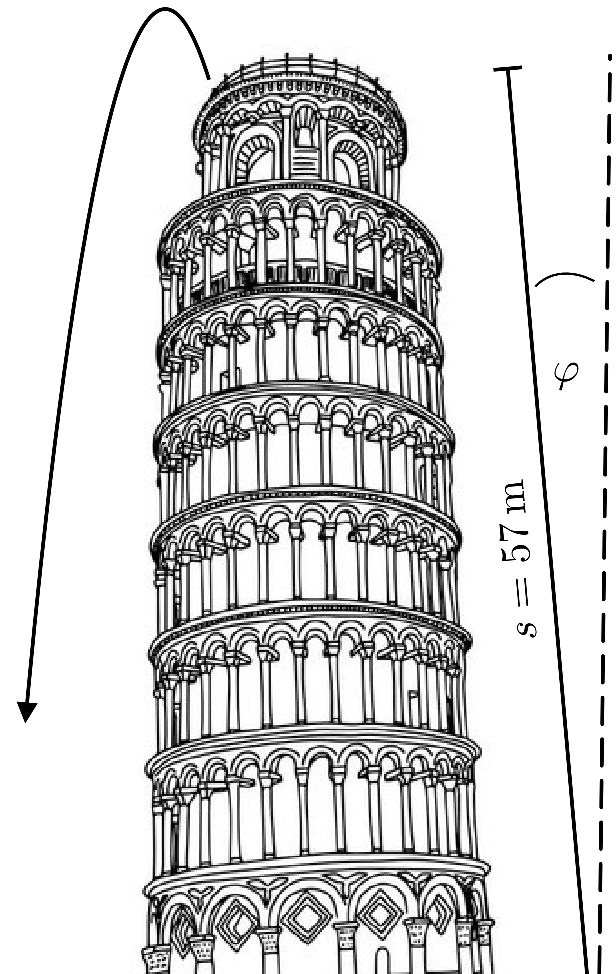
$$g = (9.85 \pm \underbrace{0.01}_{\text{stat.}} \pm \underbrace{0.05}_{\text{syst.}})\,\mathrm{m/s^2}$$

Statistisch, systematisch, falsch!

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}\,\cos\varphi$$

- Reaktionszeit beim Drücken der Stoppuhr unterliegt dem Zufall → **statistische Unsicherheit**.
- Turm vielleicht nicht 57 m, gewiss aber zwischen 54–60 m hoch → **systematische Unsicherheit**.
- Turm steht schief! → **Fehler in meiner Annahme**.





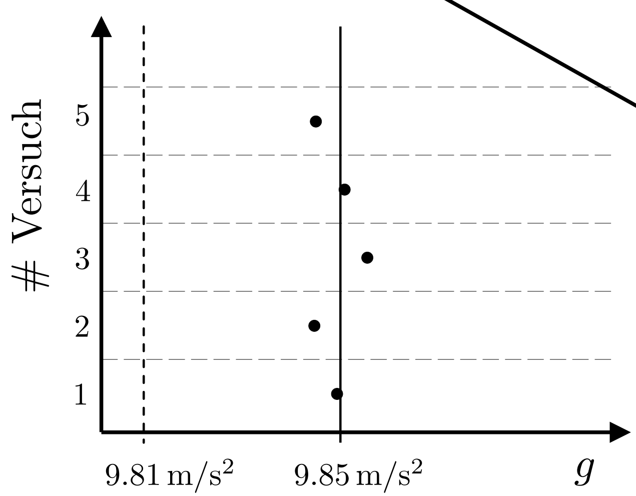
$$g = (9.82 \pm \underbrace{0.01}_{\text{stat.}} \pm \underbrace{0.05}_{\text{syst.}})\,\mathrm{m/s^2}$$

Statistische Unsicherheiten

- **Stichprobe der Länge n**

Mittelwert der Stichprobe

$$\overline{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i$$



Varianz der Stichprobe

$$s_g^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(g_i - \overline{g}\right)^2$$

$$\Delta\overline{g} = \sqrt{\frac{s_g^2}{n}}$$

$$\boxed{g = (9.85 \pm \underbrace{0.01}_{\text{stat.}})\ \mathrm{m/s^2}}$$

Statistische Unsicherheiten

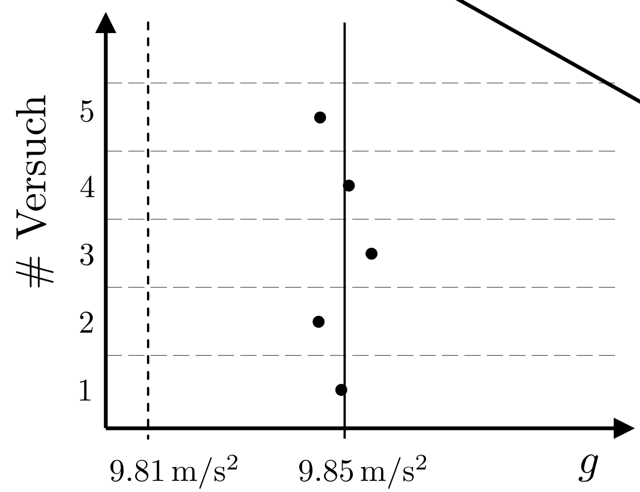
Arbeiten mit Daten [iypnb]

- **Stichprobe der Länge n**

Unsicherheit auf $\overline{\mathrm{g}}$ geht mit $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

Mittelwert der Stichprobe

$$\overline{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i$$



Varianz der Stichprobe

$$s_g^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(g_i - \overline{g})^2$$

$$\Delta\overline{g} = \sqrt{\frac{s_g^2}{n}}$$

Link

$$\boxed{g = (9.85 \pm \underbrace{0.01}_{\text{stat.}})\,\mathrm{m/s^2}}$$

Priv.-Doz. Dr. Roger Wolf
https://etpwww.etp.kit.edu/~rwolf/

Statistische Unsicherheiten (continued)

- **Stichprobe der Länge n**
- Messungen **haben bereits Unsicherheiten?**

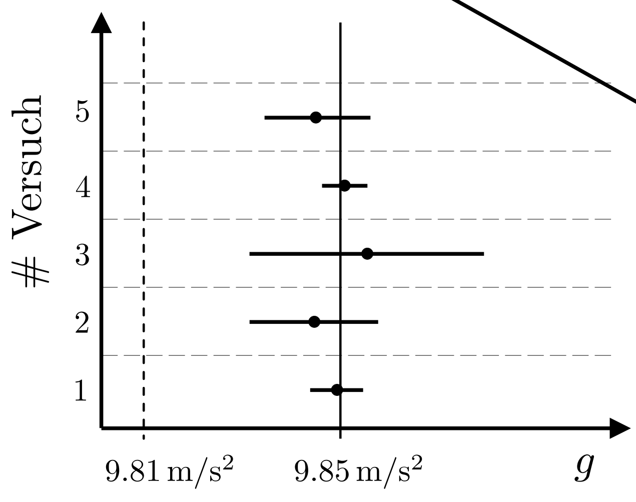
Gewichtetes Mittel der Stichprobe

$$\overline{g} = \frac{\sum w_i\, g_i}{\sum w_i}; \qquad w_i = \frac{1}{\Delta g_i^2}$$

Varianz der Stichprobe

$$s_g^2 = \frac{1}{\sum w_i}$$

$$\Delta\overline{g} = \sqrt{s_g^2}$$

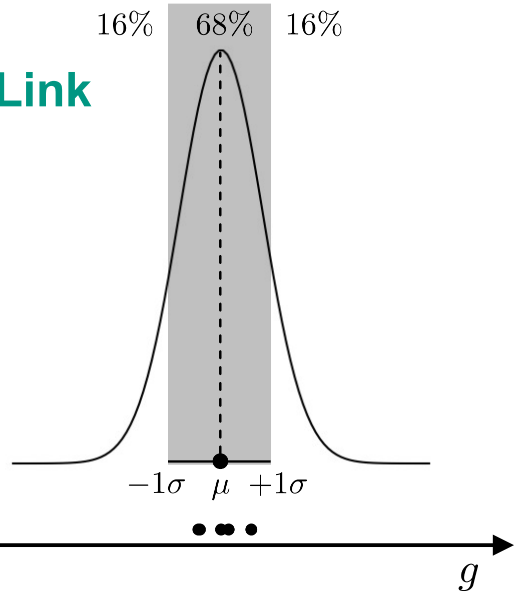


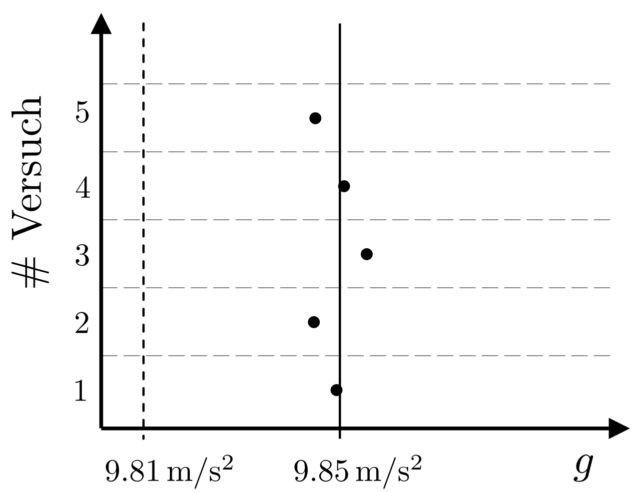
$$\boxed{g = (9.85 \pm \underbrace{0.01}_{\text{stat.}})\,\mathrm{m/s^2}}$$

Normalverteilung

Check statistics [iypnb]

Link





$$\varphi(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

$$x \simeq g; \qquad \mu \simeq \overline{g}; \qquad \sigma \simeq \Delta g$$

Konfidenzintervalle

- $x \in [\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ **68%** aller Messungen
- $x \in [\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$ **95%** aller Messungen
- $x \in [\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$ **99%** aller Messungen

Priv.-Doz. Dr. Roger Wolf
https://etpwww.etp.kit.edu/~rwolf/

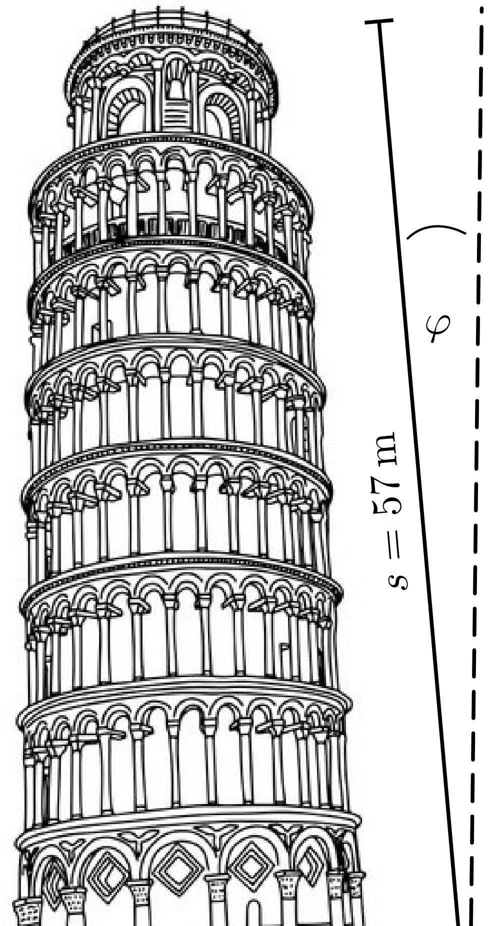
Systematische Unsicherheiten

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}\cos\varphi$$

- Hier: $\ell = (57 \pm 3)\,\mathrm{m}$
- Unsicherheit aufgrund **mangelnder Kenntnis äußerer Parameter**

Alle Parameter, die ich nicht selbst messe

Wie quantifiziere ich mangelnde Kenntnis?



$$g = (9.85 \pm 0.01 \pm \underbrace{0.05}_{\text{syst.}})\,\mathrm{m/s^2}$$

Methode-1: Autorität anderer

METRA HIT 22 … 26S/M
Analog-Digital-Multimeter mit Signalgenerator

3-349-026-01
8/11.04

METRA HIT 22/23/24/25/26
- Präzisionsmultimeter (V, dB, Ω, F, Hz, °C/°F, V⏩)
- Auflösung: 10 µV, 10 mΩ
- Integrierte Quarzuhr für echtzeitbezogene MIN-/MAX-Registrierung
- Rechtecksignalgeneratorfunktionen
- Infrarot-Datenschnittstelle
- DKD-Kalibrierschein

METRA HIT 23/24/25/26
- Strommessung (10 A) direkt oder über Zangenstromwandler: ein Übersetzungsverhältnis von 1000:1 oder 10000:1 wird in der Anzeige berücksichtigt
- METRA HIT 23S: 16 A-Messbereich (ungesichert) speziell für Messungen an Stromwandlern

METRA HIT 22M/26M
- Großer Messdatenspeicher für bis zu 100000 Messwerten
- Echtzeitbezogener, quarzgesteuerter Datenlogger

METRA HIT 25/26
- Echteffektivwertmessung TRMS

Signalgeneratorfunktion

CAT IV

DKD

QUALITÄTSMANAGEMENTSYSTEM

DQS-zertifiziert nach DIN EN ISO 9001:2000 Reg.-Nr.1262

Referenzbedingungen

Umgebungstemperatur	+23 °C ±2 K
Relative Feuchte	40 ... 60%
Frequenz der Messgröße	45 ... 65 Hz
Kurvenform der Messgröße	Sinus
Batteriespannung	3 V ±0,1 V

Technische Kennwerte

Mess-funktion	Messbereich	Auflösung bei Messbereichsendwert			Eingangsimpedanz		Eigenabweichung der höchsten Auflösung bei Referenzbedingungen		Überlastbarkeit 7)		Messrate		
							±(... % v. M. + ... D)	±(... % v. M. + ... D)					
		30000 1)	3000		—	~ / ≂	—	~ / ≂ 8)	Wert	Zeit	—	≂	~
V 4)	300 mV	10 µV			> 20 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3 7)	0,5 + 30 (> 300 D)	1000 V DC AC eff Sinus	dauernd	50 ms (22M/ 26M: 1 ms)	0,5 s	1 s
	3 V	100 µV			11 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3	0,2 + 30 (> 300 D)					
	30 V	1 mV			10 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3	0,2 + 30 (> 300 D)					
	300 V	10 mV			10 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3	0,2 + 30 (> 300 D)					
	1000 V	100 mV			10 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3	0,2 + 30 (> 300 D)					

1) Anzeige: 4¾ Stellen; für die Speicherung und Übertragung von Messwerten ist eine andere Auflösung und Abtastrate einstellbar im Menü rAtE.
2) Stoppuhr: Format: mm:ss:h mit m=Minute, s=Sekunde und h=Hundertstelsekunde, max.: 99:59.9; nur über Tasten bedienbar
3) niedrigste messbare Frequenz bei sinusförmigem Messsignal symmetrisch zum Nullpunkt
4) METRA HIT 26S/M und 25S: Echte Effektivwertmessung TRMS
5) ohne 16 A-Sicherung
6) Anzeige bis max. 1,8 V, darüber Überlauf „OL".
7) bei 0 ° ... + 40 °C
8) Werte < 100 Digit werden unterdrückt
15 (20) ... 45 ... 65 Hz ... 20 (1) kHz Sinus. Einflüsse siehe Seite 4.
9) 12 A – 5 min, 16 A – 30 s, METRA HIT23S: 16 A 10 min.
10) bei Funktion „Nullpunkteinstellung" aktiv, Anzeige ZERO
11) die Amplitude der Eingangsspannung darf folgende Werte nicht unterschreiten/überschreiten:

Beispiel: **Datenblatt** im P1-Versuch Datenverarbeitung

Priv.-Doz. Dr. Roger Wolf
https://etpwww.etp.kit.edu/~rwolf/

Methode-2: Eigene Einschätzung

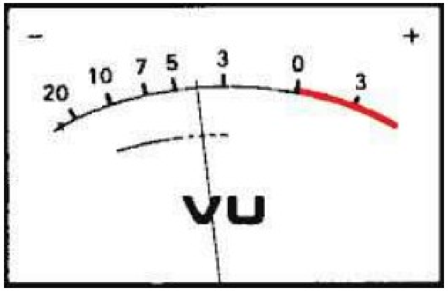
- Bona fides, **gesunder Menschenverstand**
- Anhaltspunkte:

$$L = (82 \pm 0,5)\,\mathrm{mm}$$

$$U = (13.06 \pm 0.005)\,\mathrm{V}$$

$\oplus$ Angaben aus Datenblatt

$\oplus$ Anzeigefluktuationen



$$U = (4.0 \pm 0.2)\,\mathrm{V}$$

Methode-3: Syst. → stat.

- Sie machen **aus einer systematischen eine statistische Unscherheit**!
- Wie? – Geben Sie mir die Antwort…

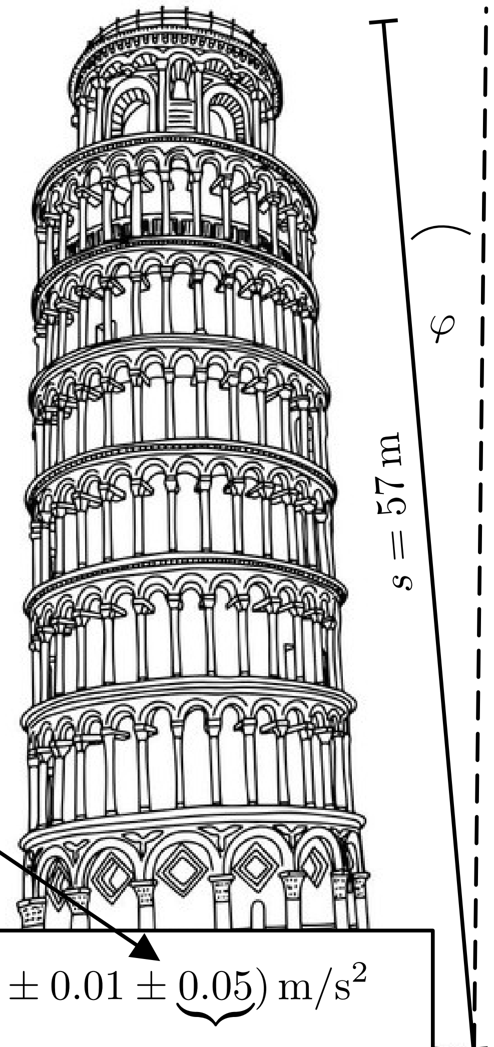
Link

Fehlerfortpflanzung

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad\qquad g = \frac{2\ell}{t^2}\, \cos\varphi$$

- Wie komme ich von $\Delta\ell$ auf Δg?

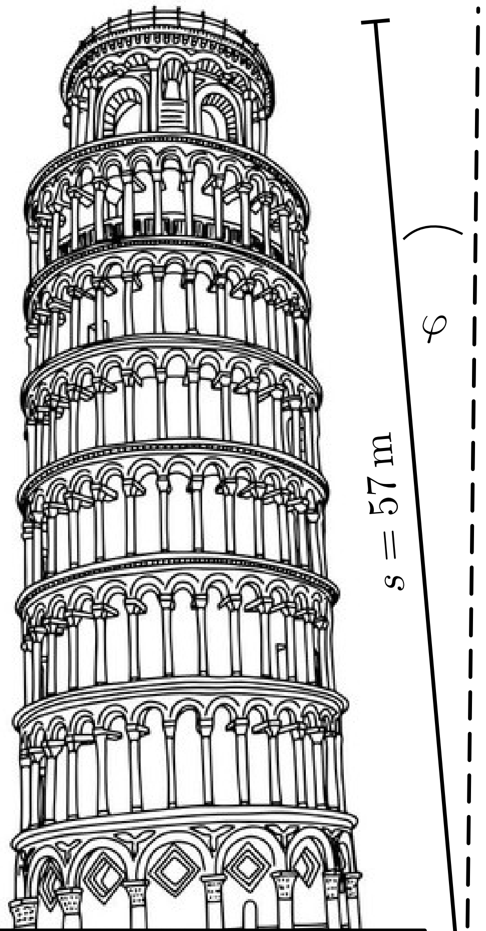
$$\Delta g_\ell = \left| \frac{\partial}{\partial \ell}\, g \right| \Delta\ell = \frac{2}{t^2}\, \cos\varphi\, \Delta\ell$$



$$g = (9.85 \pm 0.01 \pm \underbrace{0.05}_{\text{syst.}})\;\mathrm{m/s^2}$$

Fehlerfortpflanzung

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad\qquad g = \frac{2\ell}{t^2}\, \cos\varphi$$



- Wie komme ich von $\Delta\ell$ auf Δg?

$$\Delta g_\ell = \left|\frac{\partial}{\partial \ell}\, g\right| \Delta\ell = \frac{2}{t^2}\, \cos\varphi\, \Delta\ell$$

$$\Delta g_\varphi = \left|\frac{\partial}{\partial \ell}\, g\right| \Delta\varphi = \frac{2\,\ell}{t^2}\, \sin\varphi\, \Delta\varphi$$

$$\Delta g_{\mathrm{syst.}} = \sqrt{\Delta g_\ell^2 + \Delta g_\varphi^2}$$

Link

$$g = (9.85 \pm 0.01 \pm \underbrace{0.05}_{\mathrm{syst.}})\,\mathrm{m/s^2}$$

Zwei einfache Beispiele

- **Summe/Differenz** zweier Größen:

$$f(x_0, x_1) = x_0 + x_1;$$

$$\Delta\hat{f} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\,\Delta\hat{x}_0\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\Delta\hat{x}_1\right)^2} = \sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2},$$

"Fehler addieren sich quadratisch"

- **Produkt** zweier Größen:

$$f(x_0, x_1) = x_0\,x_1;$$

$$\Delta\hat{f} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\,\Delta\hat{x}_0\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\Delta\hat{x}_1\right)^2} = \sqrt{\hat{x}_1\,\Delta\hat{x}_0^2 + \hat{x}_0\,\Delta\hat{x}_1^2};$$

$$\frac{\Delta\hat{f}}{\hat{f}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\hat{x}_0}{\hat{x}_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\hat{x}_1}{\hat{x}_1}\right)^2},$$

"Relative Fehler addieren sich quadratisch"

Darstellung von Messergebnissen

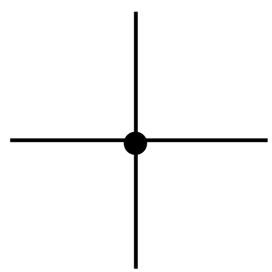
- **Im Text**:

$$g = (9.85 \pm 0.01 \pm 0.05)\,\mathrm{m/s^2}$$

$$g = (9.8523685 \pm 0.012436 \pm 0.054758)\,\mathrm{m/s^2}$$

  - **Signifikante (Nachkomma-)Stellen**: Nicht mehr Stellen, als als die erste von Null verschiedene führende Ziffer der größten Unsicherheit
  - Bis dorthin wird **gerundet**
  - Ausnahme: **Verwendung in weiteren Rechnungen**

- **Graphisch**:



  - Als **Punkt mit Fehlerbalken** (i.a. in x- UND y-Richtung)
  - Länge des Balkens $\simeq \pm\sigma$
  - Manchmal auch als Ellipse/Kontour

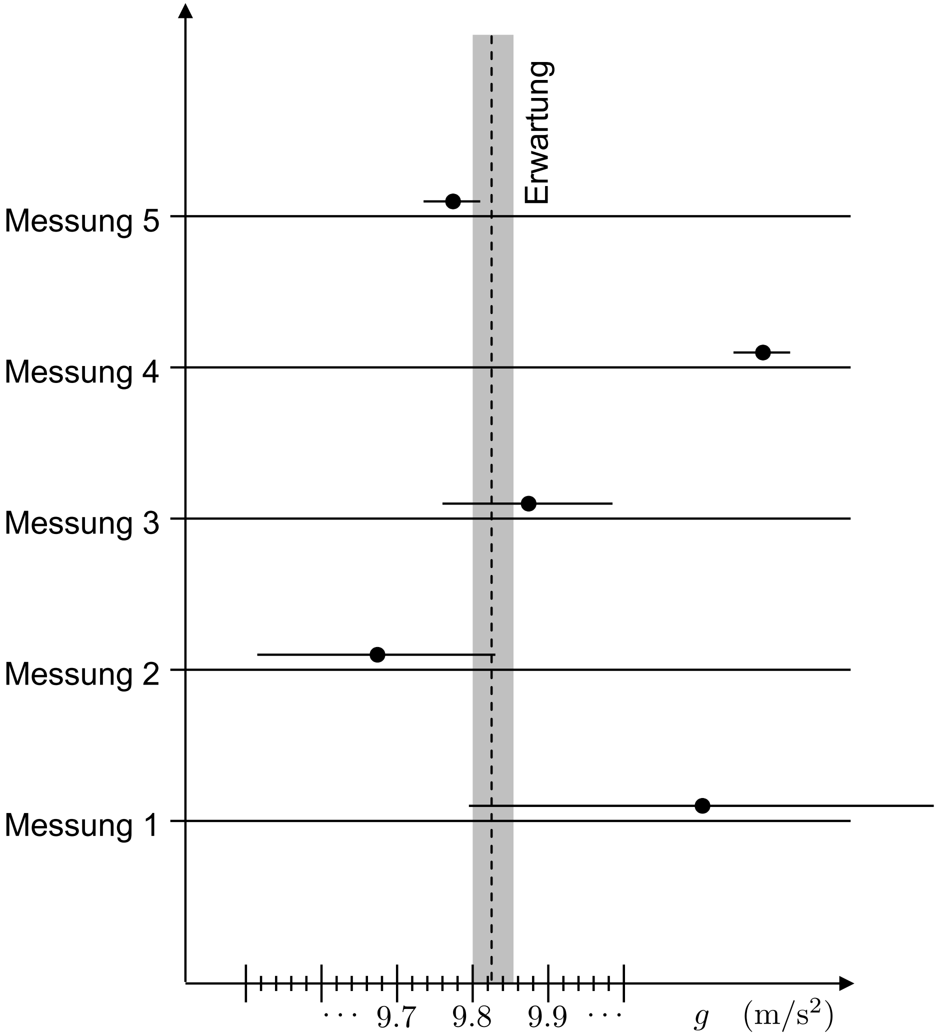
Interpretation von $g \pm \Delta g$

Check statistics [iypnb]

- Mit 68% Wahrscheinlichkeit liegt der Messpunkt **im Intervall** $[\mathrm{g}-\mathbf{\Delta}\mathrm{g};\mathrm{g}+\mathbf{\Delta}\mathrm{g}]$ **um den wahren Wert** g (→ Inklusionsschluss)

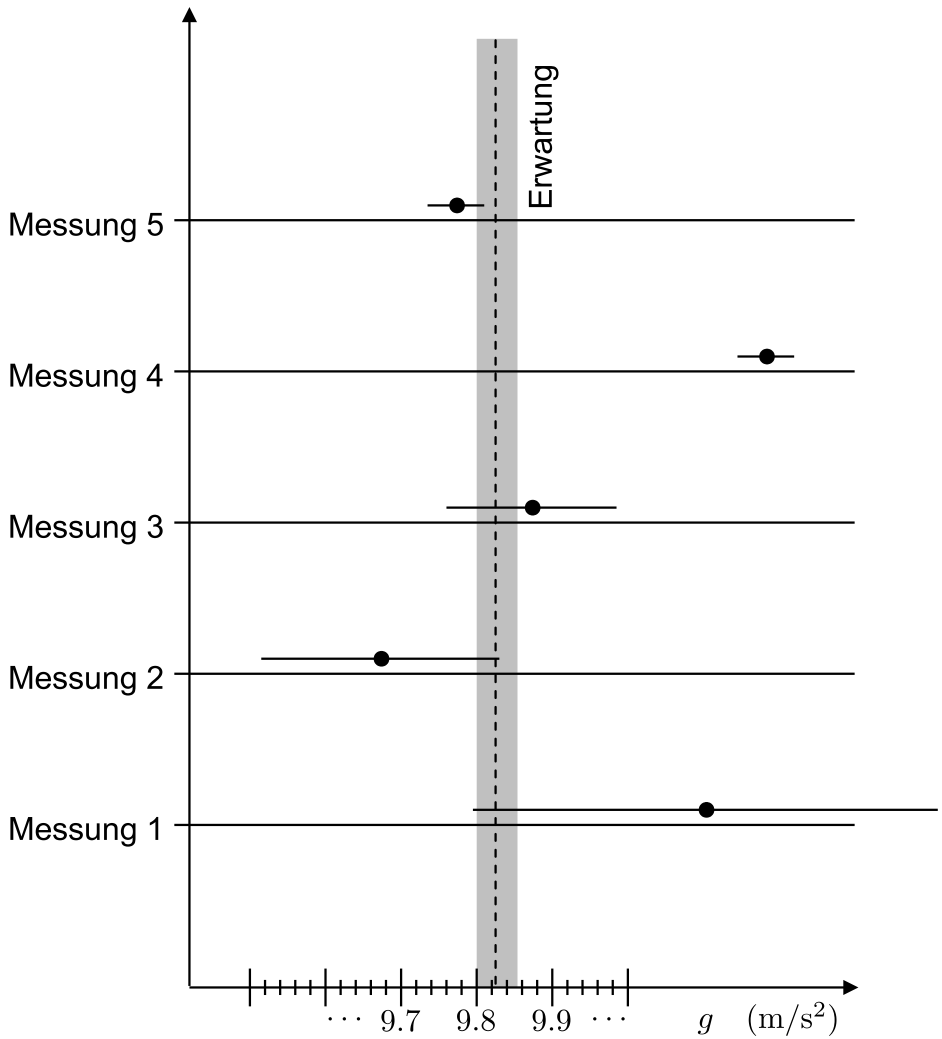
- Mit 68% Wahrscheinlichkeit überdecken ein **Messwert** $\hat{\mathrm{g}}$ **den wahren Wert** g **mit den Vertauensintervall** $[\hat{\mathrm{g}}-\mathbf{\Delta}\mathrm{g};\hat{\mathrm{g}}+\mathbf{\Delta}\mathrm{g}]$ (→ Repräsentationsschluss)

Kompatibilität zweier Messungen



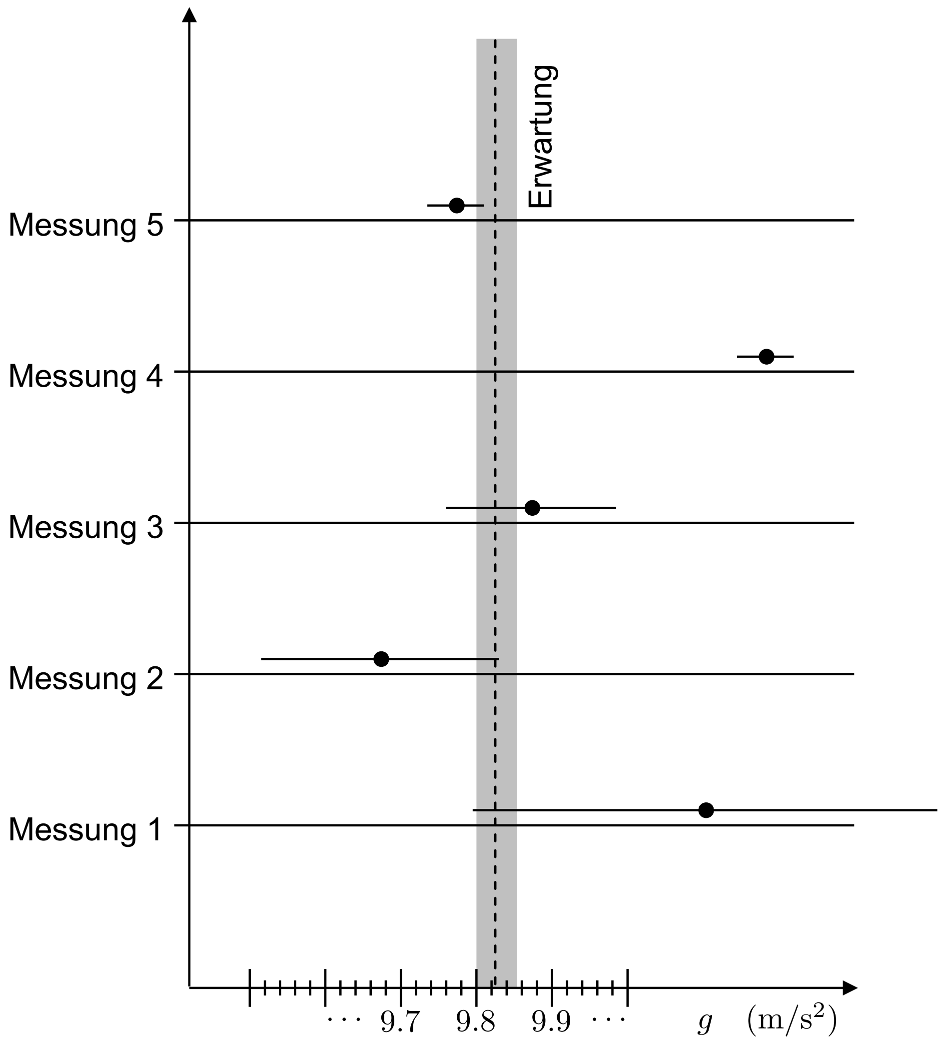
- Welche Messung(en) halten Sie für gut?

Kompatibilität zweier Messungen



- Welche Messung(en) halten Sie für gut?
- Welche Messungen halten Sie für **kompatibel mit der Erwartung**?

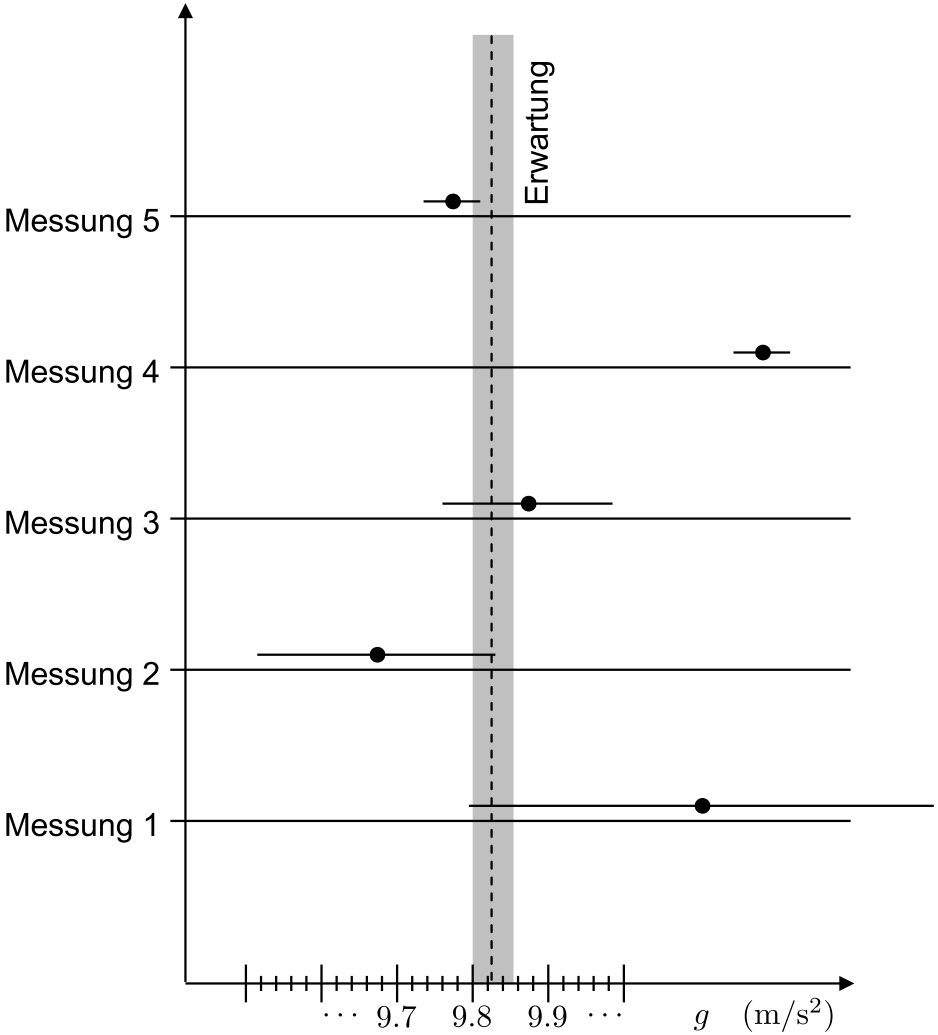
Kompatibilität zweier Messungen



- Welche Messung(en) halten Sie für gut?
- Welche Messungen halten Sie für **kompatibel mit der Erwartung**?
- Welche Messungen halten Sie für **kompatibel miteinander**?

Priv.-Doz. Dr. Roger Wolf
https://etpwww.etp.kit.edu/~rwolf/

Kompatibilität zweier Messungen



- Welche Messung(en) halten Sie für gut?
- Welche Messungen halten Sie für **kompatibel mit der Erwartung**?
- Welche Messungen halten Sie für **kompatibel miteinander**?
- Wie beurteilen Sie also Kompatibilität?

Pull/Spannung

- Wir betrachten zwei unabhängige Messungen der gleichen Größe als **verträglich oder kompatibel**, wenn ihre Differenz mit 0 kompatibel ist:

$$f(x_0, x_1) = x_0 - x_1;$$

$$\Delta\hat{f} = \sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2},$$

- Wir bestimmen die Kompatibilität zweier Messungen **IMMER relativ zu den angegebenen Unsicherheiten**.

- Die Größe

$$\delta(\hat{x}_0, \hat{x}_1) \equiv \frac{\hat{x}_0 - \hat{x}_1}{\sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2}}$$

bezeichnen wir als Spannung/Pull zwischen den Messungen $\hat{x}_0$ und $\hat{x}_1$

Pull/Spannung (continued)

Check statistics [iypnb]

- Wenn Ihre Messung normalverteilt ist und Sie Ihre Unsicherheiten richtig als $x \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ Intervalle abgeschätzt haben ist die Größe

$$\delta(\hat{x}_0, \hat{x}_1) \equiv \frac{\hat{x}_0 - \hat{x}_1}{\sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2}}$$

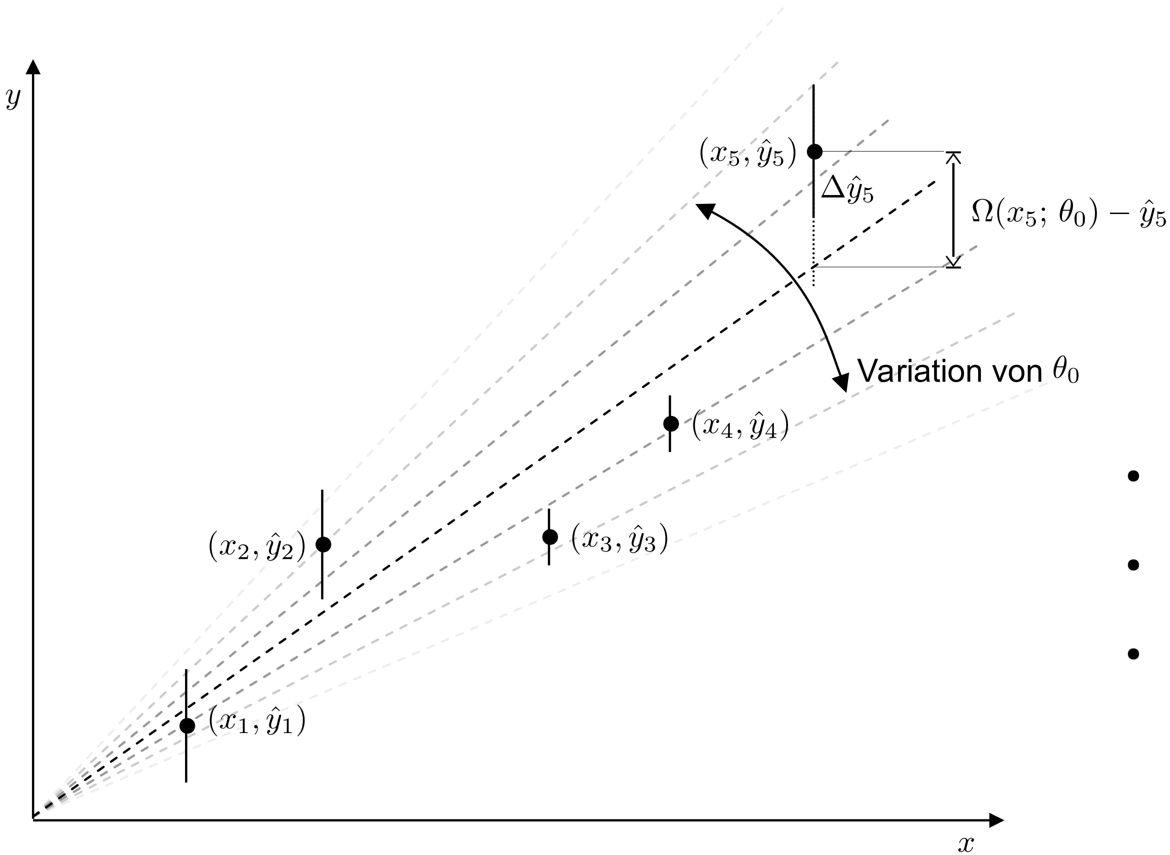
nach einer Standardnormalverteilung $\varphi(\delta, 0, 1)$ verteilt!

Wenn $\hat{\mathrm{x}}_0$ und $\hat{\mathrm{x}}_1$ WIRKLICH kompatibel sind, dann gilt:

- $\delta \in [-1; 1]$ mit **68%** Wahrscheinlichkeit
- $\delta \in [-2; 2]$ mit **95%** Wahrscheinlichkeit
- $\delta \in [-3; 3]$ mit **99%** Wahrscheinlichkeit

Priv.-Doz. Dr. Roger Wolf
https://etpwww.etp.kit.edu/~rwolf/

Bestimmung von Modellparametern



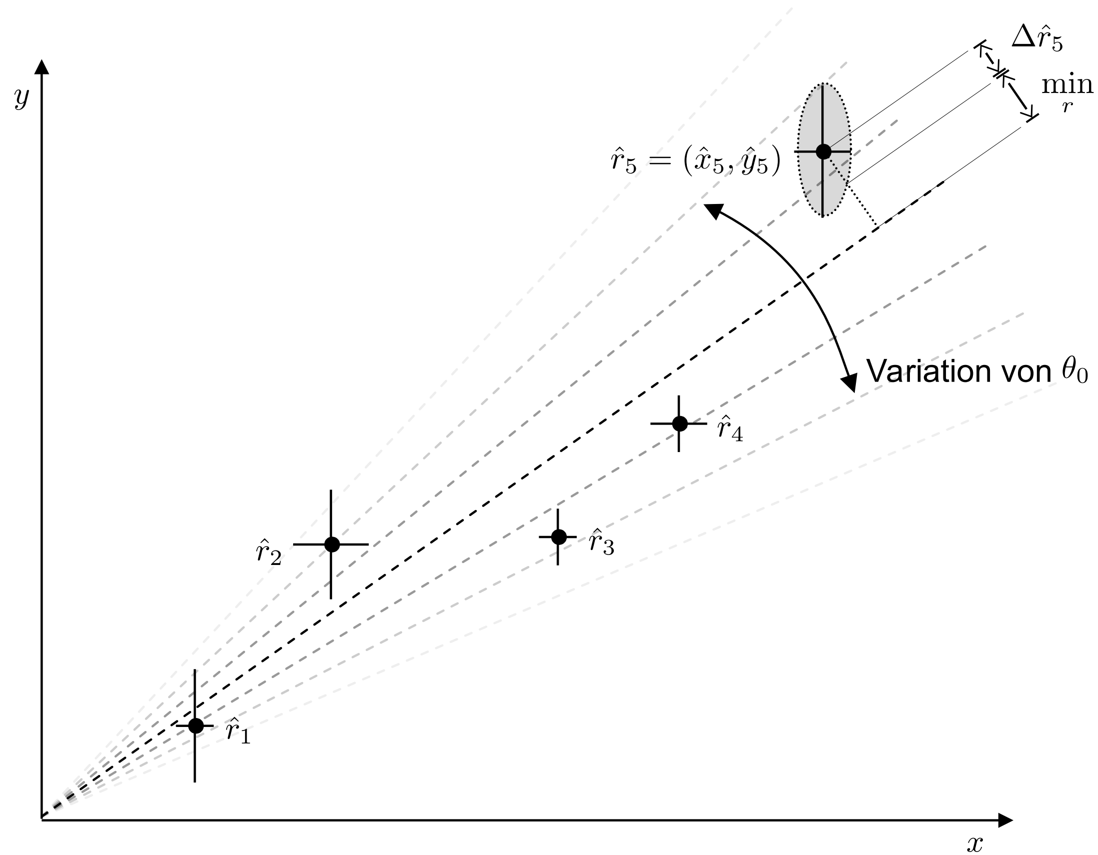
Analytisch lösbar

- Fünf Messpunkte $\hat{r}_i = (\hat{x}_i; \hat{y}_i)$
- Modell: $\Omega : y = \theta_0\, x$
- Mit welchem Wert $\hat{\theta}_0$ kann Ω die Datenpunkte am besten beschreiben?

$$z\left(\theta_0, \{x_i\};\, \{\hat{y}_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\Omega(x_i;\theta_0) - \hat{y}_i}{\Delta\hat{y}_i}}_{\equiv\,\delta(\Omega,\,\hat{y}_i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta_0\, x_i - \hat{y}_i}{\Delta\hat{y}_i}\right)^2$$

Minimiere Spannung zwischen Modell und Datenpunkten

Bestimmung von Modellparametern



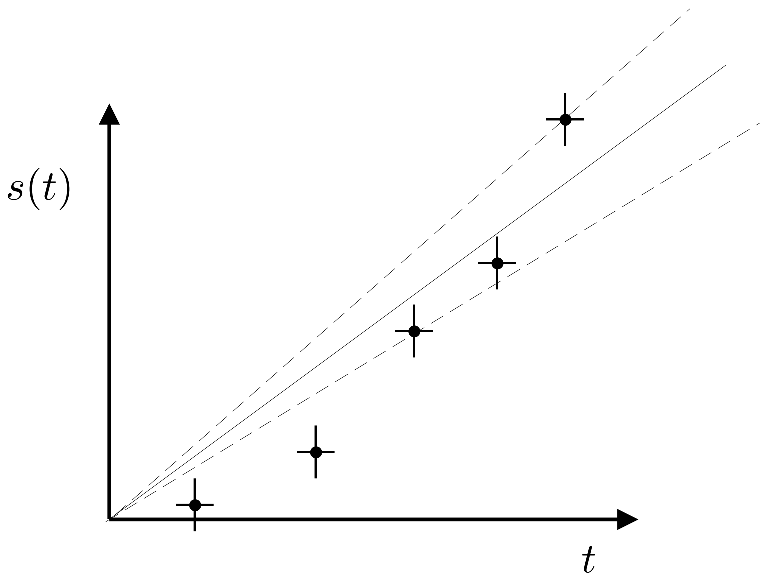
Nur numerisch lösbar!

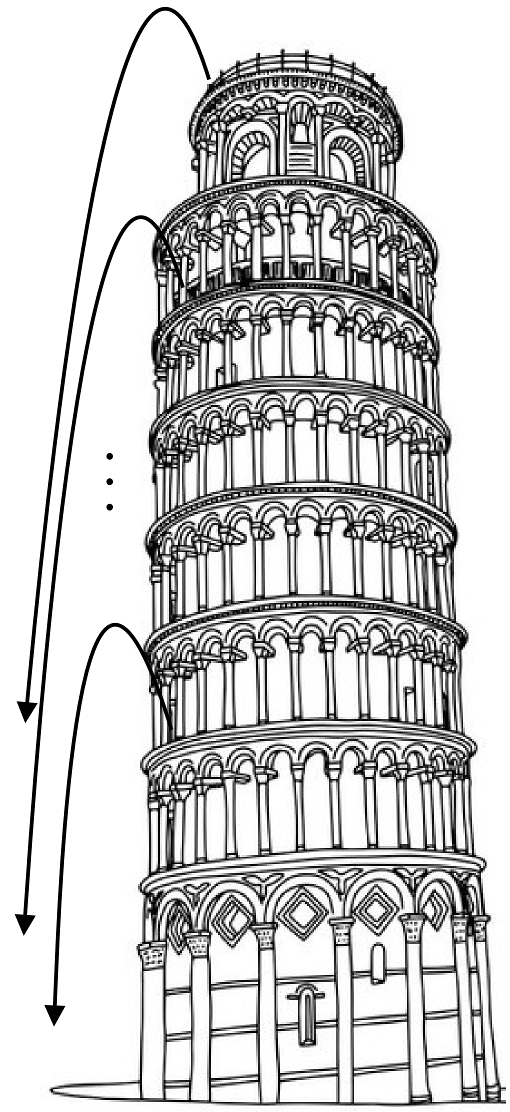
- Fünf Messpunkte $\hat{r}_i=(\hat{x}_i;\hat{y}_i)$
- Modell: $\Omega : y=\theta_0\,x$
- Mit welchem Wert $\hat{\theta}_0$ kann Ω die Datenpunkte am besten beschreiben?

$$z\left(\theta_0;\,r,\{\hat{r}_i\}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{\min\limits_r \left\|\Omega(r;\,\theta_0)-\hat{r}_i\right\|_2}{\Delta\hat{r}_i}}_{\equiv\,\delta(\Omega,\hat{r}_i)}\right)^2 .$$

Minimiere Spannung zwischen Modell und Datenpunkten

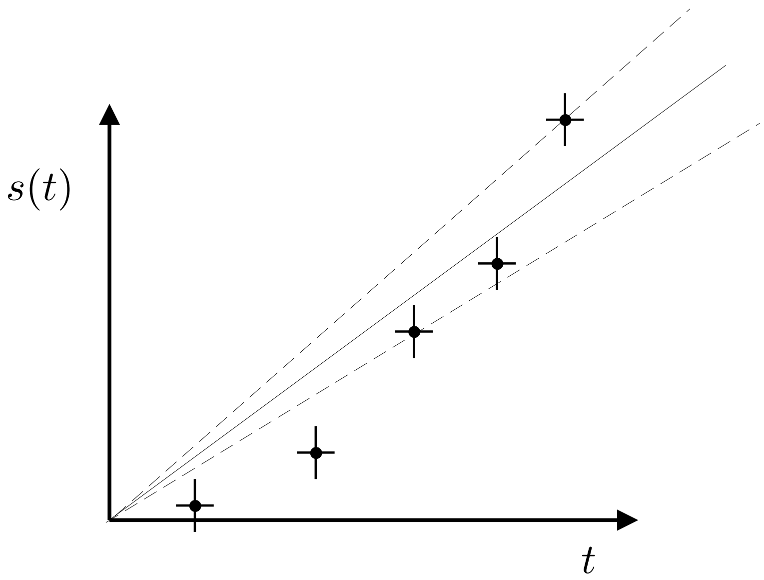
Anwendung auf unser Beispiel

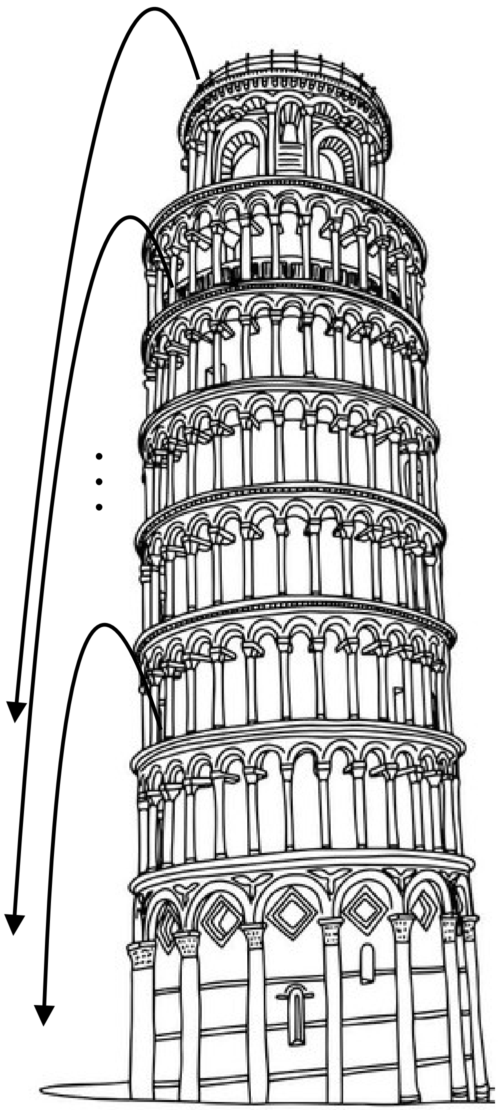




- Q: Wie groß ist die Steigung der Geraden?

Anwendung auf unser Beispiel

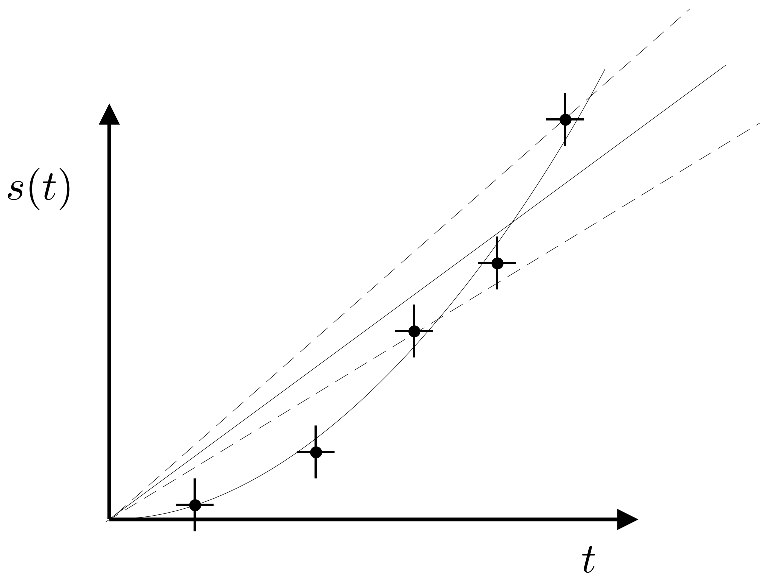




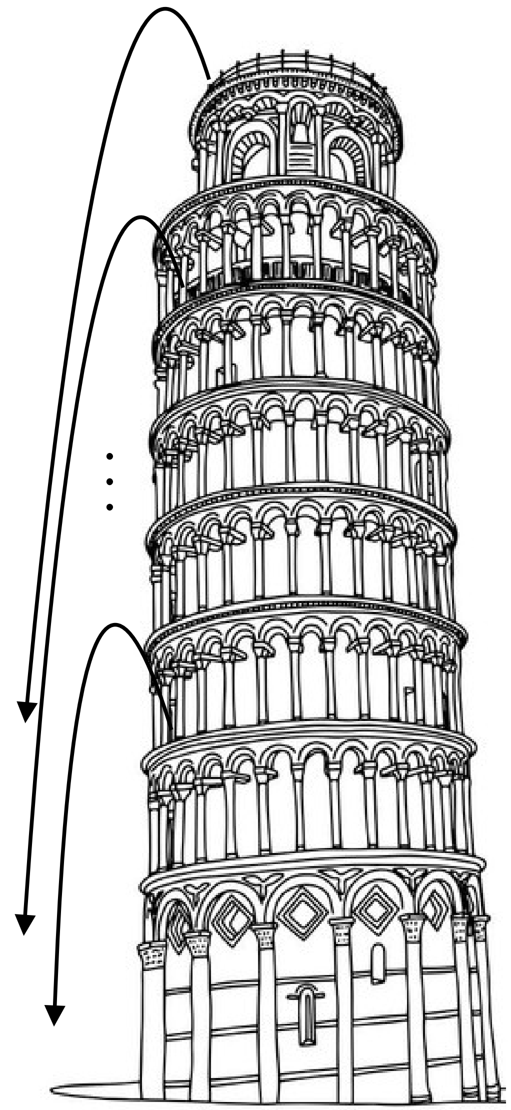
- Q: Wie groß ist die Steigung der Geraden? – **Falsche Frage!**

Anwendung auf unser Beispiel

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2$$

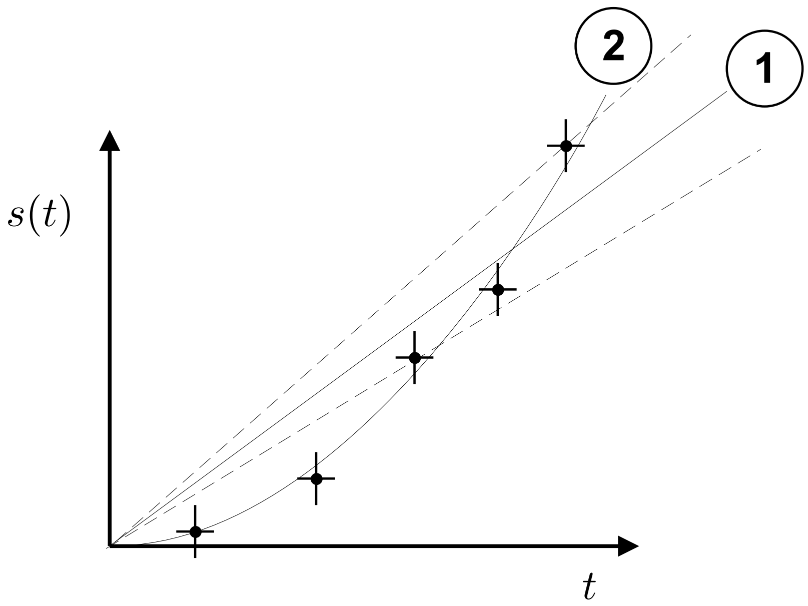


- Q: Wie groß ist die Steigung der Geraden? – **Falsche Annahme!**



χ^2-Test

- **Wie kompatibel ist mein Modell** selbst bei optimaler Wahl der Parameter mit den Daten?
- Quantifiziert durch den Wert von $\hat{z}\left(\theta_0, \{x_i\};\ \{\hat{y}_i\}\right)$ im Minimum



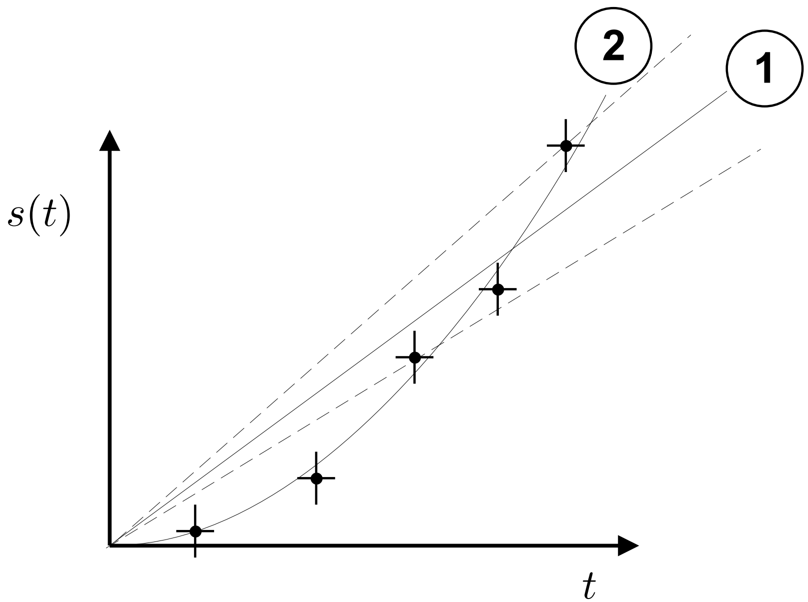
1 $\hat{z}^{(1)}\left(\theta_0, \{x_i\};\ \{\hat{y}_i\}\right) = 7.35$

2 $\hat{z}^{(2)}\left(\theta_0, \{x_i\};\ \{\hat{y}_i\}\right) = 4.05$

Welches Modell ist besser mit den Daten kompatibel?

χ^2-Test

- **Wie kompatibel ist mein Modell** selbst bei optimaler Wahl der Parameter mit den Daten?
- Quantifiziert durch den Wert von $\hat{z}\left(\theta_0, \{x_i\};\ \{\hat{y}_i\}\right)$ im Minimum



1 $\hat{z}^{(1)}\left(\theta_0, \{x_i\};\ \{\hat{y}_i\}\right) = 7.35$

2 $\hat{z}^{(2)}\left(\theta_0, \{x_i\};\ \{\hat{y}_i\}\right) = 4.05$

Welches Modell ist besser mit den Daten kompatibel?

Link

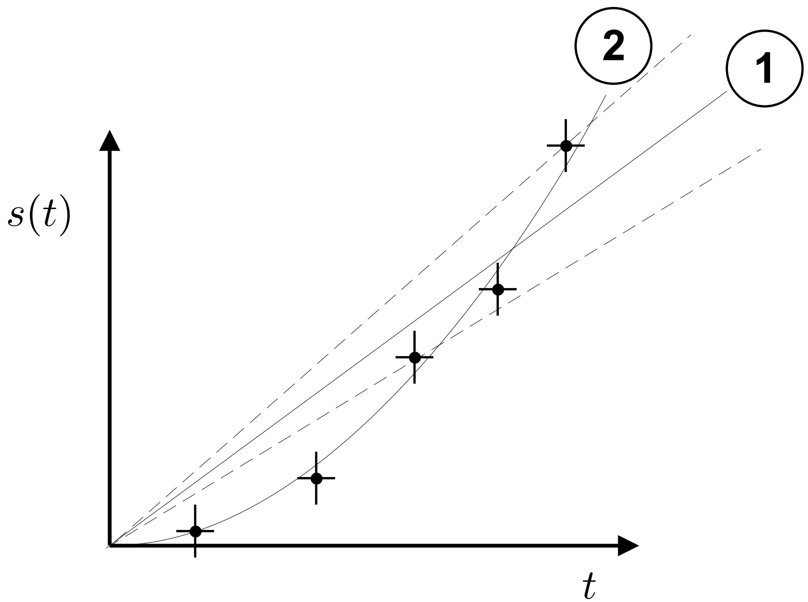
Für ein festgelegtes Modell mit $N(=5)$ Datenpunkten gibt

$$\hat{z}/N$$

die **mittlere Spannung² pro Datenpunkt** an!

χ^2-Test – Freiheitsgrad

- Enthält ein Modell freie Parameter muss N auf die **Anzahl der Freiheitsgrade (α)**, die zur Anpassung zu Verfügung stehen reduziert werden



1 Durch zwei Punkte wird eine Gerade in der Ebene festgelegt.

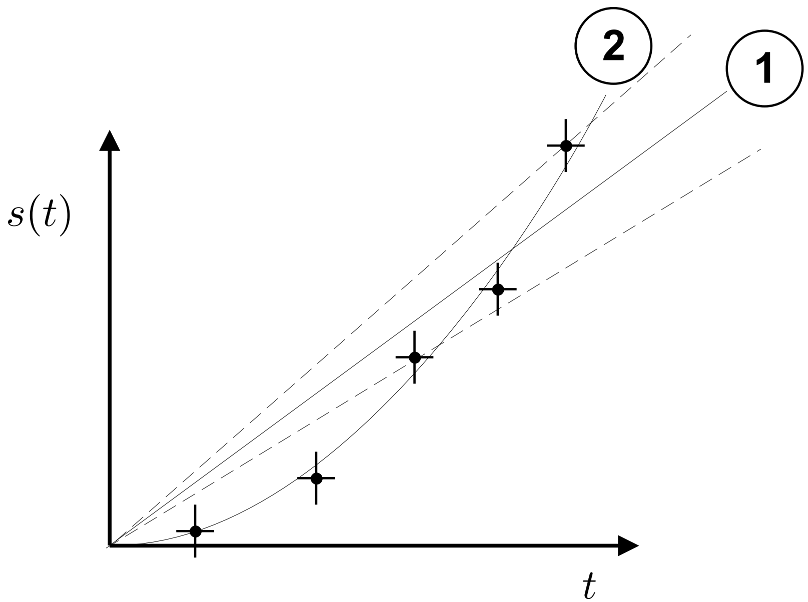
2 Durch drei Punkte eine Parabel.

Freiheitsgrad

$$\alpha = \Big(\#\ \text{Punkte} - \#\ \text{Parameter}\Big)$$

χ^2-Test

- **Angewand auf unser Beispiel:**



1 $\hat{z}^{(1)}\left(\theta_0, \{x_i\};\, \{\hat{y}_i\}\right)/\alpha = 1.84$

2 $\hat{z}^{(2)}\left(g, \{x_i\};\, \{\hat{y}_i\}\right)/\alpha = 1.01$

Ist $\hat{z}/\alpha \gg 1$ ist das angepasste Modell nicht mit den Daten kommpatibel!

Für ein Modell mit α Freiheitsgraden gibt

$$\hat{z}/\alpha$$

die **mittlere Spannung² pro Freiheits-grad** an!

The end…


Mit diesem Rüstzeug sollten Sie gut
fürs P1-Praktikum gewappnet sein.
(c) karlsruhe-insider.de

Backup

Erkenntnisgewinn seit Gallileis Zeiten

- Seit der Frühmoderne geleitet von mathematischen Modellen

Konstruktion des Modells

Erklärungskraft

Experiment:

Eintreten eines realen Ereignisses A

Modell:

Modellraum, Modellereignis A'

Überprüfung

Vorhersage

Eintreten des realen Ereignisses B

Mathematisches Resultat B'

Übertragung in die Realität

Vorhersagekraft

Modelle für die Messung von g

$$g(t;\ell,\varphi) = \frac{2\ell}{t^2}\,\cos\varphi$$

Außerdem:

- Höhe des Untergrunds?
- Anfangsgeschwindigkeit?
- Luftreibung?
- Auftrieb?
- Verborgene Parameter?

$$g(r,M) = G\,\frac{M}{r^2}$$

Modelle im P1-Versuch Datenverarbeitung

- Mathematisches Pendel:

$$m\,\ell^2\,\ddot{\varphi} + mg\ell\,\varphi = 0;$$

$$\varphi(t) = A\,\cos\left(\omega\,t + \phi_0\right); \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

\# äußerer Parameter im Modell?

- Physikalisches Pendel:

$$\Theta\,\ddot{\varphi} + Mgs\,\varphi = 0;$$

$$\varphi(t) = A\,\cos\left(\omega\,t + \phi_0\right); \qquad \omega = \sqrt{\frac{M\,s}{\Theta}\,g}$$

Link

Erwartungswert und Varianz von $\overline{\mathrm{x}}$

Die Größe

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} x_i$$

heißt Mittelwert der Stichprode. Ihr Erwartungswert ($E[\overline{x}]$) und ihre Varianz ($\mathrm{var}[\overline{x}]$) sind:

$$E[\overline{x}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i\leq n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} \underbrace{E[x_i]}_{\equiv\,\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i\leq n}\mu = \mu$$

$$\mathrm{var}[\overline{x}] = E[\overline{x}^2] - E[\overline{x}]^2 = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\right] - \mu^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} E[x_i x_j] - \mu^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[(n^2-n)\mu^2 + n(\mu^2+\sigma^2)\right] - \mu^2 = \sigma^2/n\,.$$

Dabei sind μ und σ^2 der Erwartungswert und die Varianz der Einzelmessung und n die Länge der Stichprobe.

Erwartungswert und Varianz von $\overline{x}$

Die Größe

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i \le n} x_i$$

heißt Mittelwert der Stichprode. Ihr Erwartungswert ($E[\overline{x}]$) und ihre Varianz ($\mathrm{var}[\overline{x}]$) sind:

$$E[\overline{x}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i \le n} x_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i \le n} \underbrace{E[x_i]}_{\equiv \mu} = \frac{1}{n} \sum_{i \le n} \mu = \mu$$

$$\mathrm{var}[\overline{x}] = E[\overline{x}^2] - E[\overline{x}]^2 = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\right] - \mu^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} E[x_i x_j] - \mu^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\underbrace{(n^2 - n)\mu^2}_{} + \underbrace{n(\mu^2 + \sigma^2)}_{}\right] - \mu^2 = \sigma^2/n\,.$$

Dabei sind μ und σ^2 der Erwartungswert und die Varianz der Einzelmessung und n die Länge der Stichprobe.

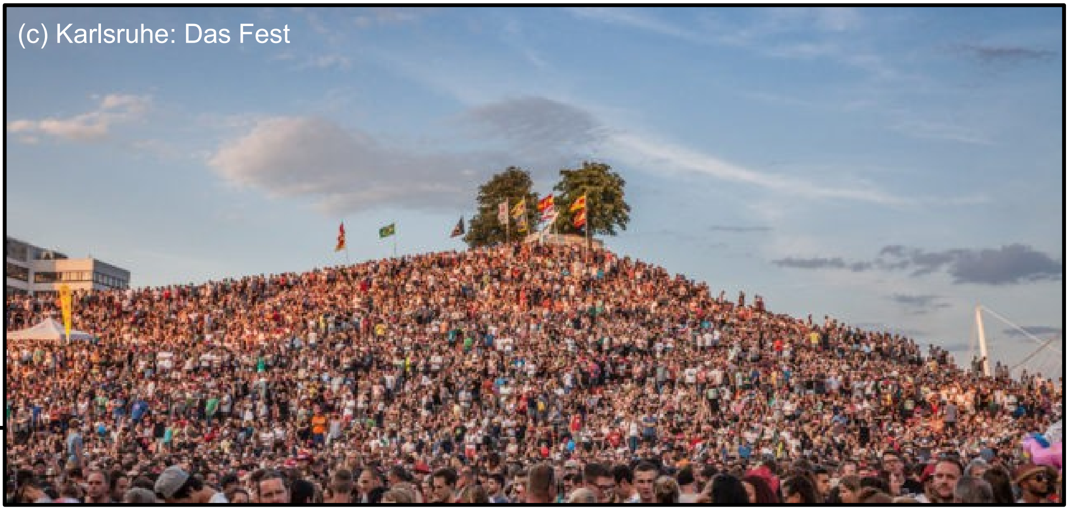
$n(n-1)$ "off-diagonale" Elemente ($i \neq j$) mit:
$E\left[x_i x_j\right] = E\left[x_i\right] E\left[x_j\right] = \mu^2$

n "diagonale" Elemente ($i = j$) mit:
$E\left[x_i x_i\right] = \mu^2 + \sigma^2$

Link

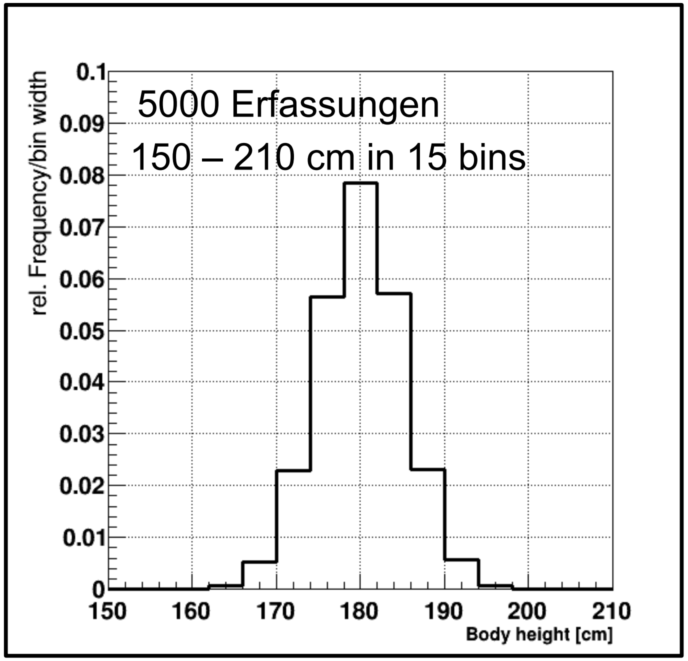
Grundbegriffe der Statistik

- Erfassung Körpergröße x von 5000 Einwohnern in Karlsruhe
- Menge aller Einwohner in Karlsruhe $\rightarrow$ **Grundgesamtheit**
- Messung mit 5000 Probanden $\rightarrow$ **Stichprobe** (engl. *sample*)
- $x \rightarrow$ (kontinuierlich verteilte) **Zufallsvariable**, Ergebnis eines **Zufallsexperiments**


(c) Karlsruhe: Das Fest

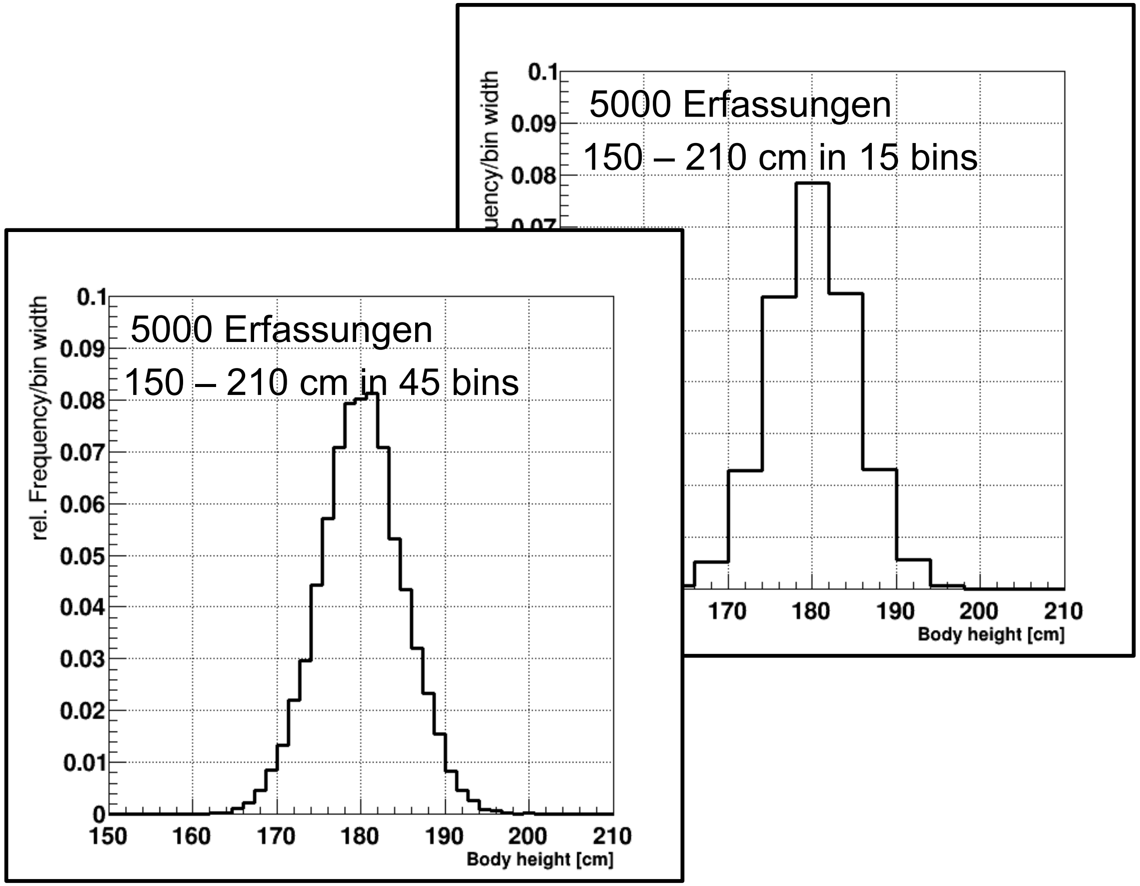
Histogramm

- **Darstellung** durch Histogramm, dividiert durch Stichprobenlänge (=5000) und Binbreite.



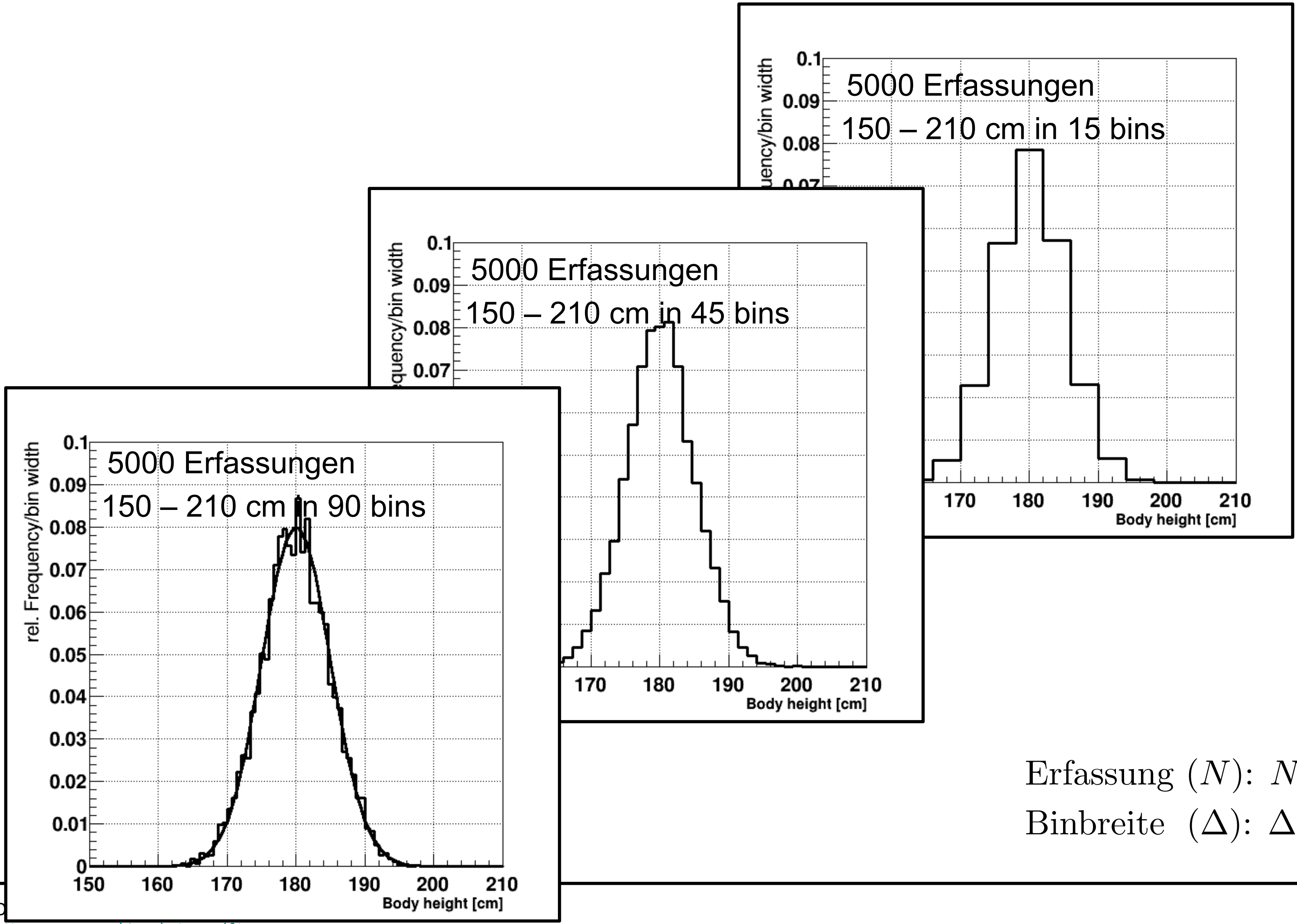
Histogramm

- **Darstellung** durch Histogramm, dividiert durch Stichprobenlänge (=5000) und Binbreite.



Histogramm

- **Darstellung** durch Histogramm, dividiert durch Stichprobenlänge (=5000) und Binbreite.



$$\text{Erfassung } (N)\text{: } N \to \infty$$
$$\text{Binbreite } (\Delta)\text{: } \Delta \to 0$$

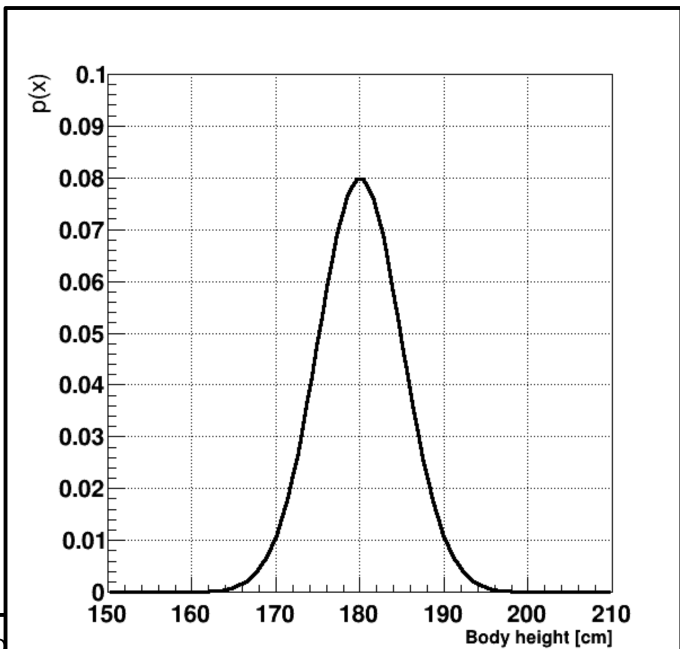
Wahrscheinlichkeitsdichte

Ist x eine kontinulierlich verteilte Zufallsvariable und die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$ über dem Ergebnisraum Ω stetig differenzierbar, dann bezeichnen wir

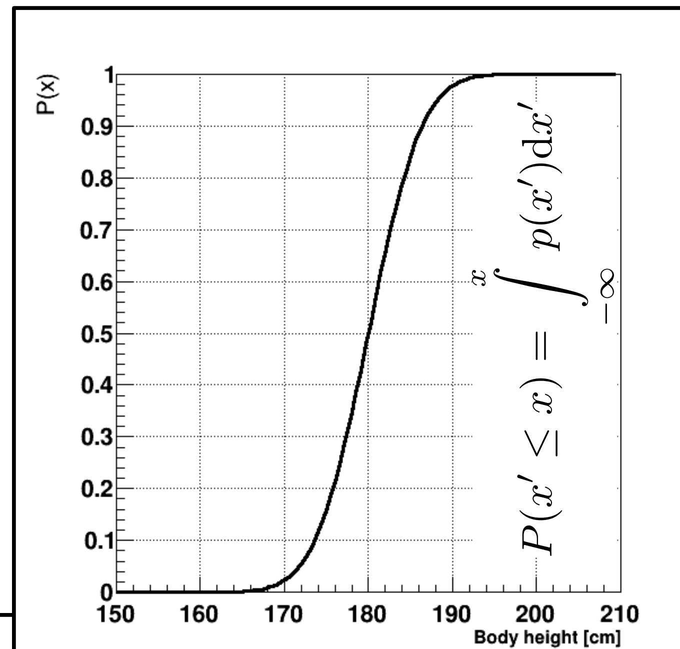
$$p(x) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)$$

als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von x.

Wahrscheinlichkeitsdichte (engl. *probability density function*, PDF)



Kumulative Wahrscheinlichkeitsfunktion (engl. *cumulative distribution function*, CDF)



Erwartungswert

Ist x eine kontinuierlich (diskret) verteilte Zufallsvariable und $p(x)$ ($P(x)$) die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte(-verteilung) über Ω. Dann bezeichnet man die Größe

$$E[x] = \int\limits_{\Omega} x\, p(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(kontinuierlich)}$$

$$E[x] = \sum_{\Omega} x_i\, P(x_i) \qquad \text{(diskret)}$$

als den Erwartungswert für x über Ω.

- Für eine vorgegebene Wahrscheinlichkeitsdichte(-verteilung) ist $E[x]$ eine Zahl und keine Funktion von x (andere gängige Bezeichnungen: μ, $\langle x\rangle$).
- Der Erwartungswert ist linear in x:

$$E\left[\,\alpha\, x + \beta\, y\,\right] = \alpha\, E[\,x\,] + \beta\, E[\,y\,]$$

Varianz

Man bezeichnet $E\left[(x-x_0)^n\right]$ als das n-te algebraische Moment um x_0. In der Statistik sind die folgenden Spezialfälle für $x_0 = E[x]$ von Relevanz:

$$\begin{aligned}
&\text{0-tes Moment:} \quad && E[(x-E[x])^0] = \int_\Omega p(x)\,\mathrm{d}x = 1 \\
&\text{1-tes Moment:} \quad && E[(x-E[x])^1] = \int_\Omega (x-E[x])\,p(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\
&\text{2-tes Moment:} \quad && E[(x-E[x])^2] = \int_\Omega (x-E[x])^2\,p(x)\,\mathrm{d}x \\
& && = \underbrace{\int_\Omega x^2\,p(x)\,\mathrm{d}x}_{E[x^2]} \underbrace{- 2E[x]\int_\Omega x\,p(x)\,\mathrm{d}x}_{E[x]^2} \underbrace{+ E[x]^2\int_\Omega p(x)\,\mathrm{d}x}_{E[x]^2}
\end{aligned}$$

Das 2-te algebraische Moment um $E[x]$

$$\mathrm{var}[x] = E\left[(x-E[x])^2\right] = E[x^2] - E[x]^2$$

heißt Varianz von x über Ω, $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}[x]}$ heißt Standardabweichung.

Wahrscheinlichkeit

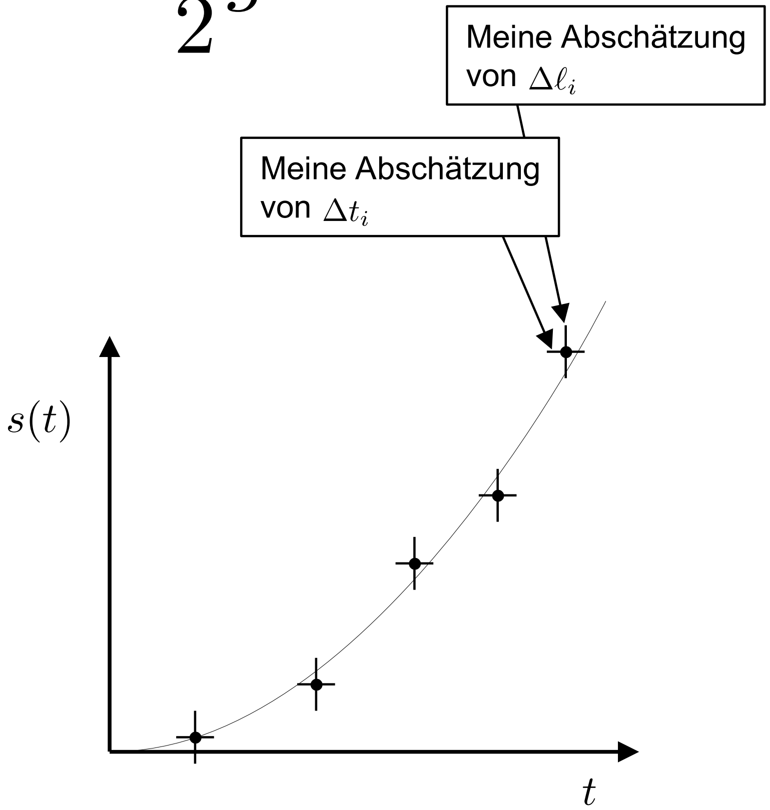
- Wahrscheinlichkeit für $x = (180 \pm 1)\mathrm{cm}$ nicht aus $p(x)|_{x=180}$ sondern aus:

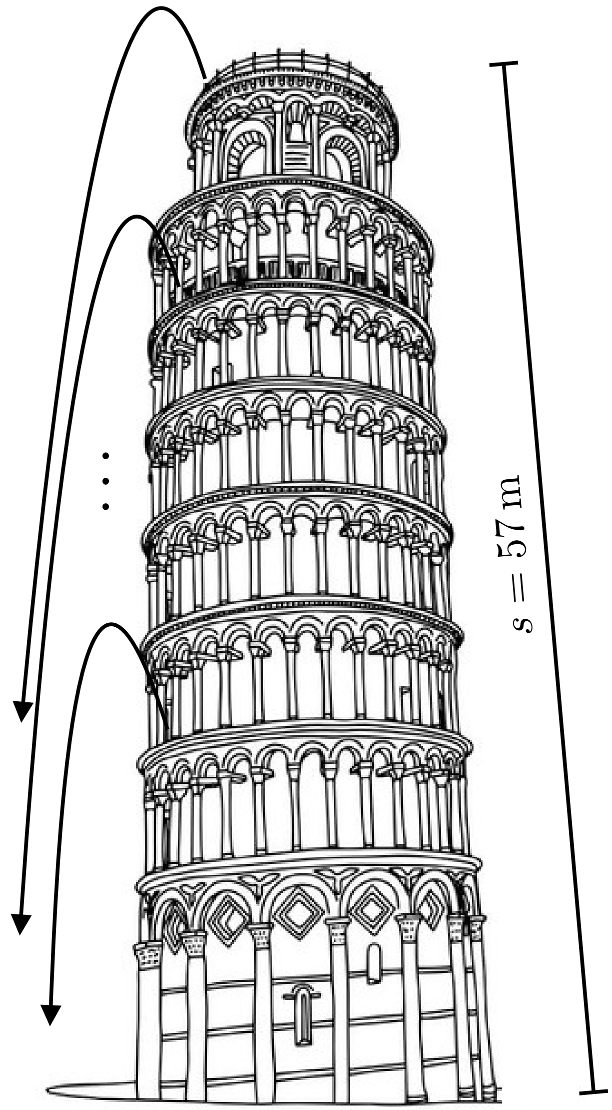
$$\int\limits_{179\,\mathrm{cm}}^{181\,\mathrm{cm}} p(x')\mathrm{d}x' = P(x \leq 181\,\mathrm{cm}) - P(x \leq 179\,\mathrm{cm})$$

Link

Bessere Messung von g

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2$$





$g(\{(\ell_i, t_i)\})$ hängt von $\{(\ell_i, t_i)\}$ ab!

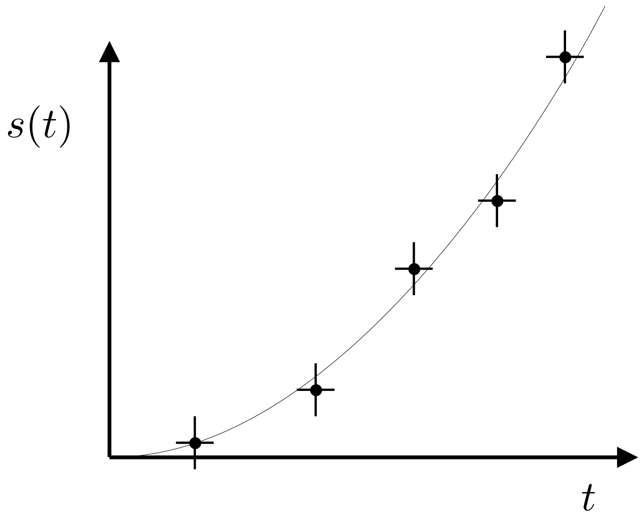
Neu ↔ Alt

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$g = \frac{2\ell}{t^2}$$

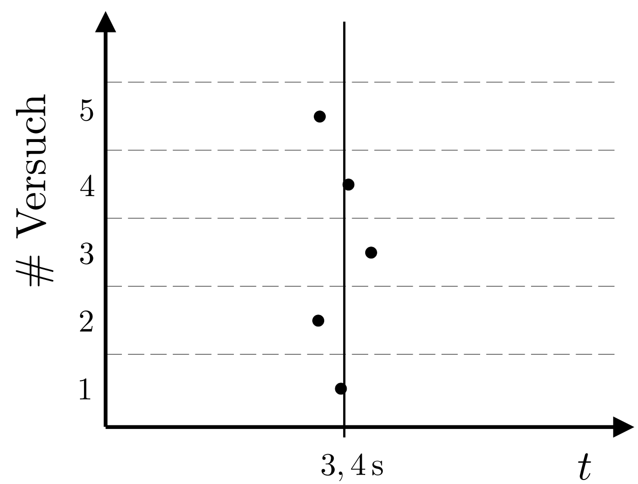
Neues Modell:

- Messe $\{(\ell_i, t_i)\}$ (stat. Unsicherheiten)



Altes Modell:

- Messe t (stat. Unsicherheit)
- ℓ extern bestimmter Parameter des Modells (syst. Unsicherheit)



Link

Priv.-Doz. Dr. Roger Wolf
https://etpwww.etp.kit.edu/~rwolf/

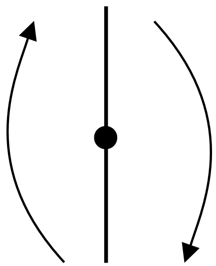
Erhaltung der Wahrscheinlichkeit

$$g = \frac{2\ell}{t^2}$$

Wenn die θ_j unabhängig sind ist es egal, wie ich Richtung der Variation festlege

$$\Delta g_{\ell} = \left|\frac{\partial}{\partial\ell}\,g\right|\Delta\ell = \frac{2}{t^2}\,\cos\varphi\,\Delta\ell$$

$$\Delta g_{\varphi} = \left|\frac{\partial}{\partial\ell}\,g\right|\Delta\varphi = \frac{2\,\ell}{t^2}\,\sin\varphi\,\Delta\varphi$$



$$\Delta g_{\mathrm{syst.}} = \sqrt{\Delta g_{\ell}^2 + \Delta g_{\varphi}^2}$$

Link

χ^2-Teststatistik

- Wenn Ihre Messung normalverteilt ist und Sie Ihre Unsicherheiten richtig als $x \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ Intervalle abgeschätzt haben ist die Größe

$$\delta(\hat{x}_0, \hat{x}_1) \equiv \frac{\hat{x}_0 - \hat{x}_1}{\sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2}}$$

nach einer Standardnormalverteilung $\varphi(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ verteilt!

- Dann ist die Verteilung der Größe

$$z\left(\theta_j;\, r, \{\hat{r}_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta(\Omega(\theta_j), \hat{r}_i)^2.$$

analytisch geschlossen darstellbar!

χ^2-Verteilung

$$\chi^2_\alpha(x) = \frac{1}{2^{\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)} x^{\alpha/2-1} e^{-x/2}$$

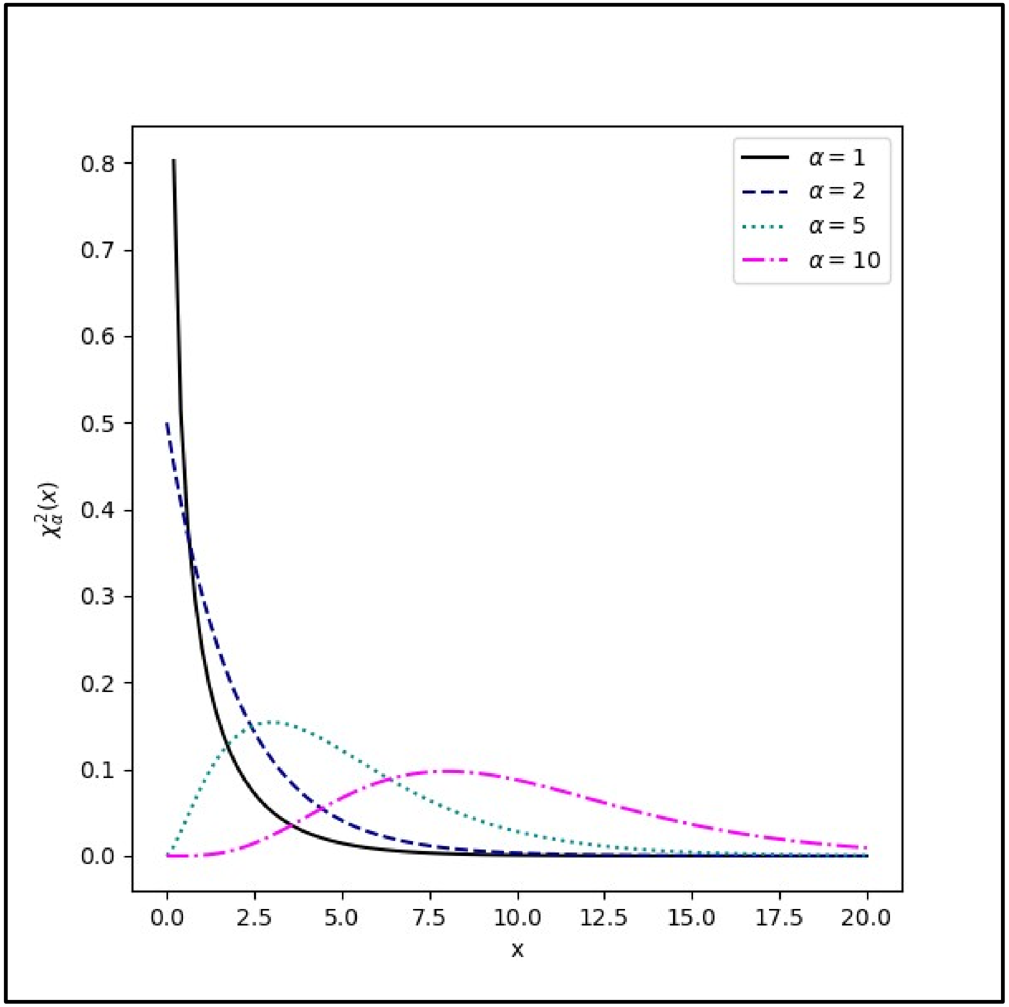
mit:

$$\Gamma(x) = \int e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

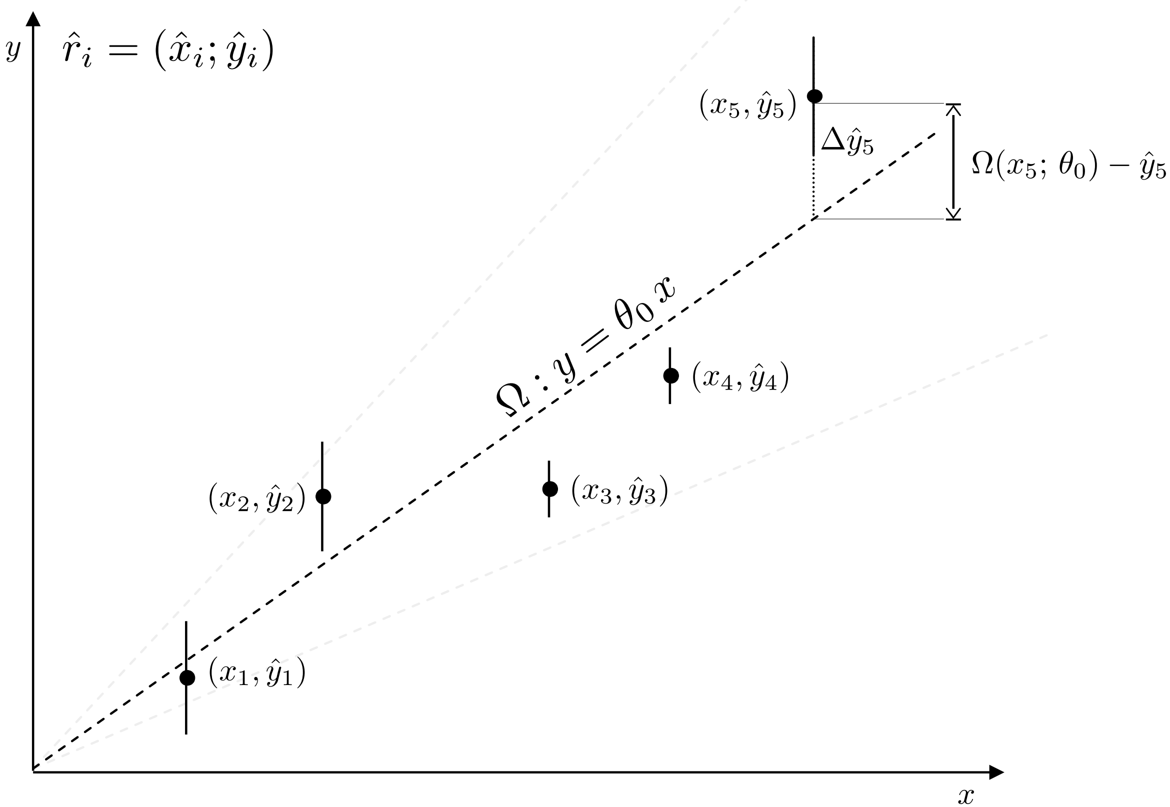
$$E[x] \;\; = \alpha$$

$$\mathrm{var}[x] = 2\,\alpha$$

α entspricht den Freiheitsgraden auf Folie 40



Bezug zur Maximum Likelihood Schätzung



Annahme:

- Ω ist wahr!
- Die $\hat{r}_i$ sind normalverteilt mit $\mu_i = \hat{y}_i,\ \sigma_i = \Delta\hat{y}_i$

Link

Wahrscheinlichkeit für **DIESEN Ausgang** des Experiments:

$$\mathcal{L}(\theta_0; \{(x_i\, \hat{y}_i)\}) = \prod_{i=1}^{5} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\sigma_i^2}} e^{-\left(\hat{y}_i - \mu_i(\theta_0)\right)^2/2\sigma_i^2}$$

$$\ln(\mathcal{L}(\theta_0; \{(x_i\, \hat{y}_i)\})) = -\underbrace{\sum_{i=1}^{5} \frac{\left(\hat{y}_i - \mu_i(\theta_0)\right)^2}{2\,\sigma_i^2}}_{\equiv \frac{1}{2}\, z} + \underbrace{\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2} \ln\left(2\,\pi\sigma_i^2\right)}_{\equiv\, const.}$$

Priv.-Doz. Dr. Roger Wolf
https://etpwww.etp.kit.edu/~rwolf/

Noch mehr Statistik?!?

- **Einführende Literatur zu Statistik und Numerik:**
  - G. Cowan, *Statistical data analysis*, Oxford (1997) (KIT-Bibliothek).
  - G. Bohm, G. Zech, *Einführung in Statistik und Messwertanalyse für Physiker*, DESY (2006) (eBook deutsch, eBook english).
  - V. Blobel, E. Lormann, *Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse*, DESY (2012) (Webseite).
  - R. J. Barlow, *Statistics: A Guide to the use of statistical methods in the physical sciences*, Wiley (1989) (KIT-Bibliothek).
  - W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical recipes*, Cambridge Univ. Press (2007) (Webseite).