Datenverarbeitung im P1-Praktikum

Roger Wolf

27. Oktober 2026

Inhalt

- **Grundlagen zur Datenauswertung** im P1:
  - Messwerte mit Unsicherheiten
  - Darstellung von Messergebnissen
  - Fehlerfortpflanzung
  - Verträglichkeit von Messergebnissen
  - Parameterschätzung
  - Verträglichkeit von Modellen
- **Schriftlich und im eigenen Tempo**:
  - Diese Folien auf den Webseiten des P1 [**hier**]
  - Anleitung und Hinweise zum Versuch Datenverarbeitung [**hier**]
  - Jupyter-notebooks zum ausprobieren [**hier**]

Messung der Fallzeit t

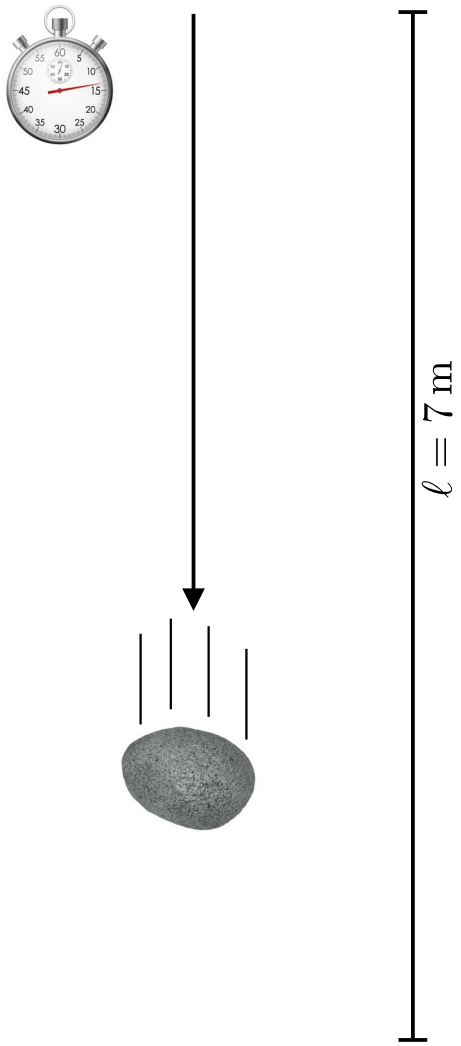
Zelle 2 [iypnb]

- **Fallhöhe:**

$$\ell = 7\,\mathrm{m}$$

Zeitmessung	Wert (s)
1	1.20
2	1.23
3	1.19
4	1.13
5	1.24
6	1.22
7	1.17
8	1.26
9	1.21
10	1.23

Stichprobe der Länge n=10



Mittelwert der Stichprobe

Zelle 3 [iypnb]

- **Länge der Stichprobe:** $n = 10$

Mittelwert der Stichprobe:	Varianz der Stichprobe:	Unsicherheit auf $\bar{t}$:
$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$	$s_t^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)^2$	$\Delta\bar{t} = \sqrt{\frac{s_t^2}{n}}$

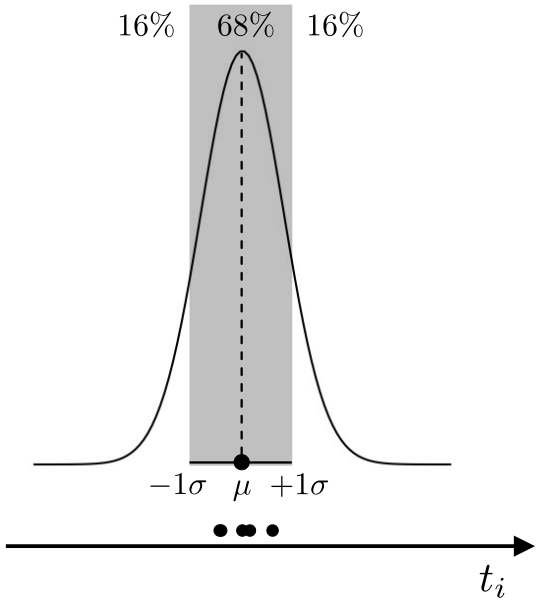
Mittelwert der Stichprobe (gewichtet)

- **Länge der Stichprobe:** $n = 10$

Mittelwert der Stichprobe:	**Varianz der Stichprobe:**	**Unsicherheit auf $\bar{t}$:**
$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$	$s_t^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)^2$	$\Delta\bar{t} = \sqrt{\frac{s_t^2}{n}}$
$\bar{t} = \frac{\sum w_i\, t_i}{\sum w_i};$ $w_i = \frac{1}{\Delta t_i^2}$	$s_t^2 = \frac{1}{\sum w_i}$	$\Delta\bar{t} = \sqrt{s_t^2}$

Normalverteilung

Zelle 4 und 5 [iypnb]



$$\varphi(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

$$x \simeq t_i; \quad \mu \simeq \bar{t}; \quad \sigma \simeq \sqrt{s_t^2}$$

Vertrauensintervalle

- $x \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ **68%** aller Messungen
- $x \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ **95%** aller Messungen
- $x \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ **99%** aller Messungen

Messung und Wahrheit

- **Wissenschaftliches Experiment → nur innerhalb bestimmter Grenzen reproduzierbar**

  → Vertrauensintervall

  → Ohne zusätzliche Angabe eines Vertrauensintervalls wissenschaftliche Messung …

Messung und Wahrheit

- **Wissenschaftliches Experiment → nur innerhalb bestimmter Grenzen reproduzierbar**

  → Vertrauensintervall

  → Ohne zusätzliche Angabe eines Vertrauensintervalls wissenschaftliche Messung …

W E R T L O S !

Messung und Wahrheit

Kein Messwert ohne Angabe eines Vertrauensintervalls



$$\bar{t} = (1.208000 \pm 0.011907)\,\mathrm{s}$$

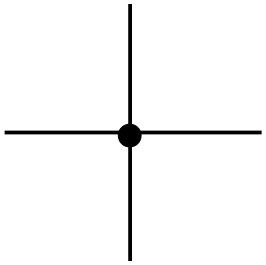
Darstellung von Messergebnissen

$$\bar{t} = (1.21 \pm 0.01)\,\mathrm{s}$$

$$\bar{t} = (1.208000 \pm 0.011907)\,\mathrm{s}$$

- **Signifikante (Nachkomma-)Stellen**: Nicht mehr Stellen, als die erste von Null verschiedene führende Ziffer der (größten) Unsicherheit
- Bis dorthin wird **gerundet**
- Ausnahme: **Verwendung in weiteren Rechnungen**

- **Graphisch**:



- Als **Punkt mit Fehlerbalken** (i.a. in x- UND y-Richtung)
- Länge des Balkens $\simeq \pm\sigma$
- Manchmal auch als Ellipse/Kontour

Fehlerfortpflanzung

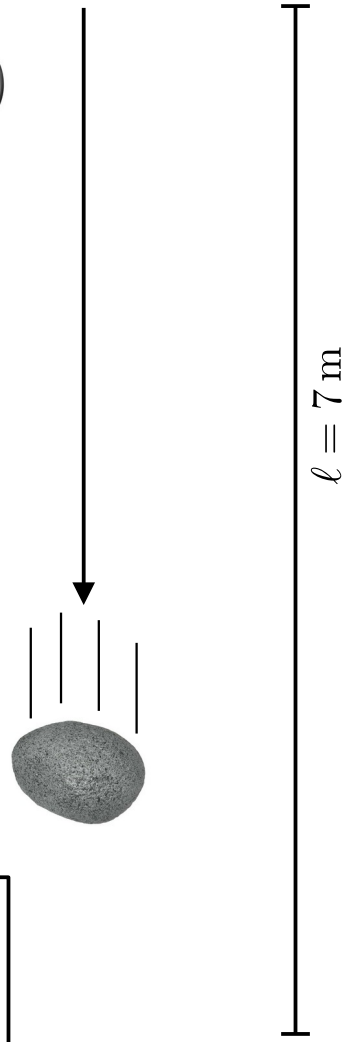
Zelle 6 [iypnb]

- **Ergbeschleunigung g aus Fallzeit:**

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2; \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}$$

- Wie komme ich von $\Delta\bar{t}$ auf Δg?





$$g = (9.59 \qquad) \,\mathrm{m/s^2}$$

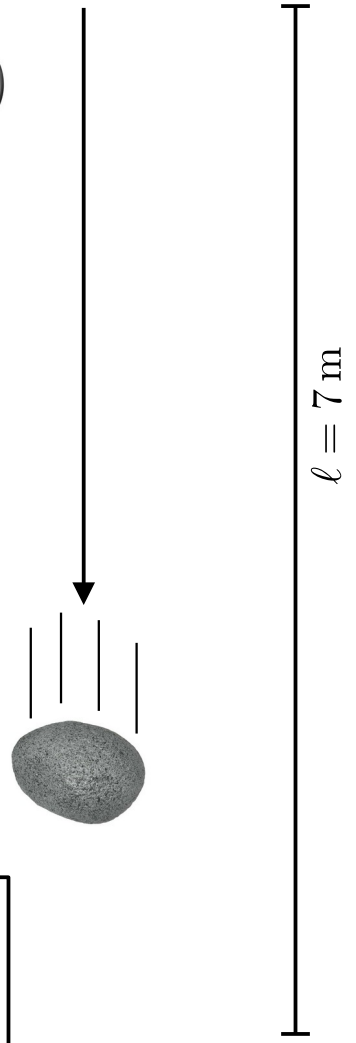
Fehlerfortpflanzung

Zelle 7 [iypnb]

- **Ergbeschleunigung g aus Fallzeit:**

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2; \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}$$





- Wie komme ich von $\Delta\bar{t}$ auf Δg?

$$\Delta g = \left| \frac{\partial}{\partial t} g \right| \Delta\bar{t} = 2\,\frac{2\,\ell}{t^3}\,\Delta\bar{t}$$

$$g = (9.59 \pm 0.19) \,\mathrm{m/s^2}$$

Zwei einfache Beispiele für Fehlerforpflanzung

- **Summe/Differenz** zweier Größen:

$$f(x_0, x_1) = x_0 + x_1;$$

$$\Delta\hat{f} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\,\Delta\hat{x}_0\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\Delta\hat{x}_1\right)^2} = \sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2},$$



"Fehler addieren sich quadratisch"

- **Produkt** zweier Größen:

$$f(x_0, x_1) = x_0\, x_1;$$

$$\Delta\hat{f} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\,\Delta\hat{x}_0\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\Delta\hat{x}_1\right)^2} = \sqrt{\hat{x}_1\,\Delta\hat{x}_0^2 + \hat{x}_0\,\Delta\hat{x}_1^2};$$

"Relative Fehler addieren sich quadratisch"

$$\frac{\Delta\hat{f}}{\hat{f}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\hat{x}_0}{\hat{x}_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\hat{x}_1}{\hat{x}_1}\right)^2}.$$

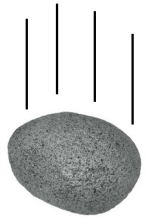
Fehlerfortpflanzung

Zelle 8 [iypnb]

- **Ergbeschleunigung aus Fallzeit:**

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2; \qquad g = \frac{2\ell}{t^2}$$





$\ell = (7.12 \pm 0.05)\,\mathrm{m}$

- Wie komme ich von $\Delta\bar{t}$ auf Δg?

$$\Delta g = \left|\frac{\partial}{\partial t}\, g\right| \Delta\bar{t} = 2\,\frac{2\,\ell}{t^3}\,\Delta\bar{t}$$

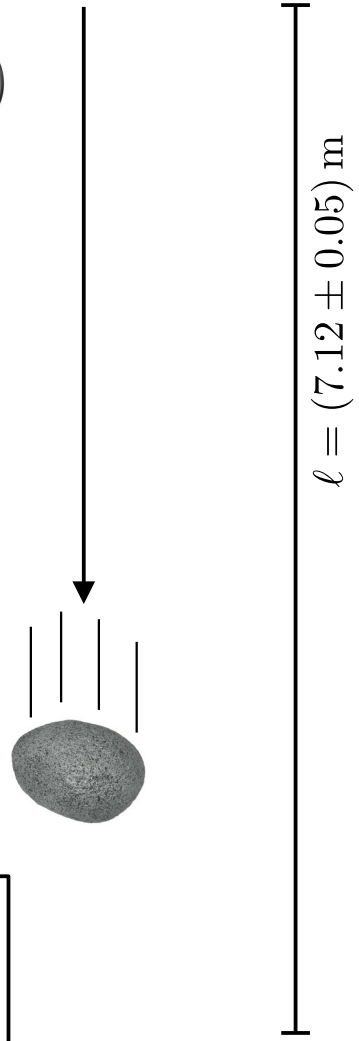
$$\Delta g_\ell = \left|\frac{\partial}{\partial \ell}\, g\right| \Delta\ell = \frac{2}{t^2}\,\Delta\ell$$

$$g = (9.59 \pm \underbrace{0.19}_{\text{stat.}} \pm \underbrace{0.07}_{\text{syst.}})\,\mathrm{m/s^2}$$

Statistisch, systematisch, falsch!

- **Mehrere Quellen von Unsicherheiten und Fehlern:**
  - Reaktionszeit beim Drücken der Stoppuhr → Zufall
    → **statistische Unsicherheit**.
  - Fallhöhe falsch bestimmt
    → **Fehler(!) in meiner Annahme**.
  - Fallhöhe nicht ganz sicher?!?
    → **systematische Unsicherheit**.



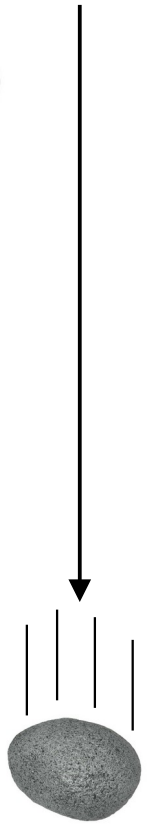


$$g = (9.59 \pm \underbrace{0.19}_{\text{stat.}} \pm \underbrace{0.07}_{\text{syst.}})\,\mathrm{m/s^2}$$

Statistisch, systematisch, falsch!

- **Mehrere Quellen von Unsicherheiten und Fehlern:**
  - Reaktionszeit beim Drücken der Stoppuhr → Zufall
    → **statistische Unsicherheit**.
  - Fallhöhe falsch bestimmt
    → **Fehler(!) in meiner Annahme**.
  - Fallhöhe nicht ganz sicher?!?
    → **systematische Unsicherheit**.





$\ell = (7.12 \pm 0.05)\,\mathrm{m}$

Was ist der Unterschied zwischen einer statistischen und einer systematischen Unsicherheit?

$$g = (9.59 \pm \underbrace{0.19}_{\text{stat.}} \pm \underbrace{0.07}_{\text{syst.}})\,\mathrm{m/s^2}$$

Kombination von Unsicherheiten

- **Unabhängige Größen:**

$$\Delta g = \sqrt{\Delta g^2_{\text{stat.}} + \Delta g^2_{\text{syst.}}}$$

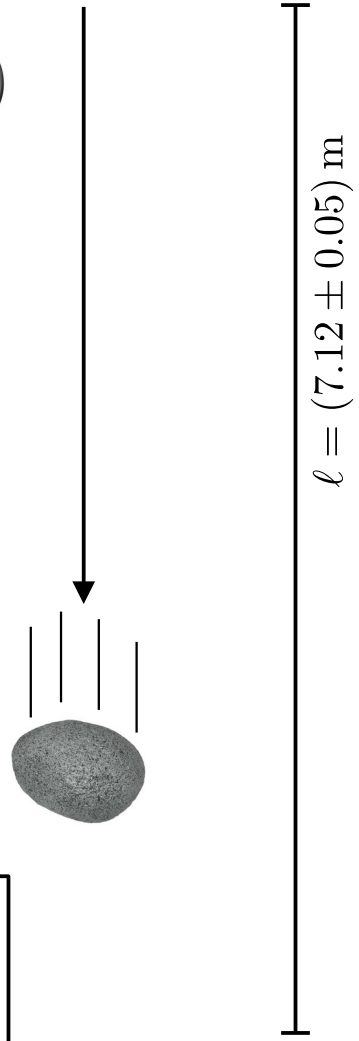
- Maximal korrelierte Unsicherheiten:

$$\Delta g = \Delta g_{\text{stat.}} + \Delta g_{\text{syst.}}$$

- Mit ρ korrelierte Unsicherheiten:

$$\Delta g = \sqrt{\Delta g^2_{\text{stat.}} + \Delta g^2_{\text{syst.}} + \rho\, \Delta g_{\text{stat.}}\, \Delta g_{\text{syst.}}}$$





$$g = (9.59 \pm 0.21)\,\text{m/s}^2$$

Unsicherheiten bestimmen







Methode-1: Die Stichprobe…

- Sie machen eine **Stichprobe aus möglichst vielen, unabhängigen Messungen** und gehen vor wie auf Folie 4.

Methode-2: Die Autorität anderer…

METRA HIT 22 … 26S/M
Analog-Digital-Multimeter mit Signalgenerator

3-349-026-01
8/11.04



METRA HIT 22/23/24/25/26
- Präzisionsmultimeter (V, dB, Ω, F, Hz, °C/°F, V-▶|-)
- Auflösung: 10 µV, 10 mΩ
- Integrierte Quarzuhr für echtzeitbezogene MIN-/MAX-Registrierung
- Rechtecksignalgeneratorfunktionen
- Infrarot-Datenschnittstelle
- DKD-Kalibrierschein

METRA HIT 23/24/25/26
- Strommessung (10 A) direkt oder über Zangenstromwandler: ein Übersetzungsverhältnis von 1000:1 oder 10000:1 wird in der Anzeige berücksichtigt
- METRA HIT 23S: 16 A-Messbereich (ungesichert) speziell für Messungen an Stromwandlern

METRA HIT 22M/26M
- Großer Messdatenspeicher für bis zu 100000 Messwerten
- Echtzeitbezogener, quarzgesteuerter Datenlogger

METRA HIT 25/26
- Echteffektivwertmessung TRMS

Signalgeneratorfunktion

CAT IV

DKD

DQS-zertifiziert nach DIN EN ISO 9001:2000 Reg.-Nr. 1262

Referenzbedingungen

Umgebungstemperatur	+23 °C ±2 K
Relative Feuchte	40 ... 60%
Frequenz der Messgröße	45 ... 65 Hz
Kurvenform der Messgröße	Sinus
Batteriespannung	3 V ±0,1 V

Technische Kennwerte

Mess-funktion	Messbereich	Auflösung bei Messbereichsendwert			Eingangsimpedanz		Eigenabweichung der höchsten Auflösung bei Referenzbedingungen		Überlastbarkeit [7]		Messrate		
		30000 [1]	3000		—	~ / ⩱	±(... % v. M. + ... D) —	±(... % v. M. + ... D) ~ / ⩱ [8]	Wert	Zeit	—	⩱	~
V [4]	300 mV	10 µV			> 20 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3 [7]	0,5 + 30 (> 300 D)	1000 V DC AC eff Sinus	dauernd	50 ms (22M/26M: 1 ms)	0,5 s	1 s
	3 V	100 µV			11 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3	0,2 + 30 (> 300 D)					
	30 V	1 mV			10 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3	0,2 + 30 (> 300 D)					
	300 V	10 mV			10 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3	0,2 + 30 (> 300 D)					
	1000 V	100 mV			10 MΩ	5 MΩ // < 50 pF	0,05 + 3	0,2 + 30 (> 300 D)					

1) Anzeige: 4¾ Stellen; für die Speicherung und Übertragung von Messwerten ist eine andere Auflösung und Abtastrate einstellbar im Menü rAtE.
2) Stoppuhr: Format: mm:ss:h mit m=Minute, s=Sekunde und h=Hundertstelsekunde, max.: 99:59.9; nur über Tasten bedienbar
3) niedrigste messbare Frequenz bei sinusförmigem Messsignal symmetrisch zum Nullpunkt
4) METRA HIT 26S/M und 25S: Echte Effektivwertmessung TRMS
5) ohne 16 A-Sicherung
6) Anzeige bis max. 1,8 V, darüber Überlauf „OL".
7) bei 0 ° ... + 40 °C
8) Werte < 100 Digit werden unterdrückt
15 (20) ... 45 ... 65 Hz ... 20 (1) kHz Sinus. Einflüsse siehe Seite 4.
9) 12 A – 5 min, 16 A – 30 s, METRA HIT23S: 16 A 10 min.
10) bei Funktion „Nullpunkteinstellung" aktiv, Anzeige ZERO
11) die Amplitude der Eingangsspannung darf folgende Werte nicht unterschreiten/überschreiten:

Methode-3: Die eigene Einschätzung…

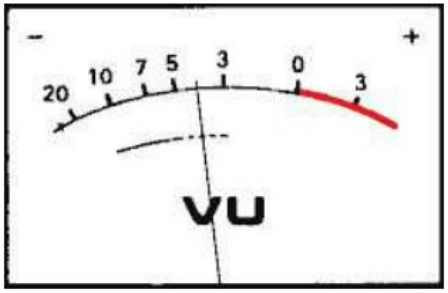
- Bona fides, **gesunder Menschenverstand**
- Anhaltspunkte:



$$L = (82 \pm 0.5)\,\mathrm{mm}$$

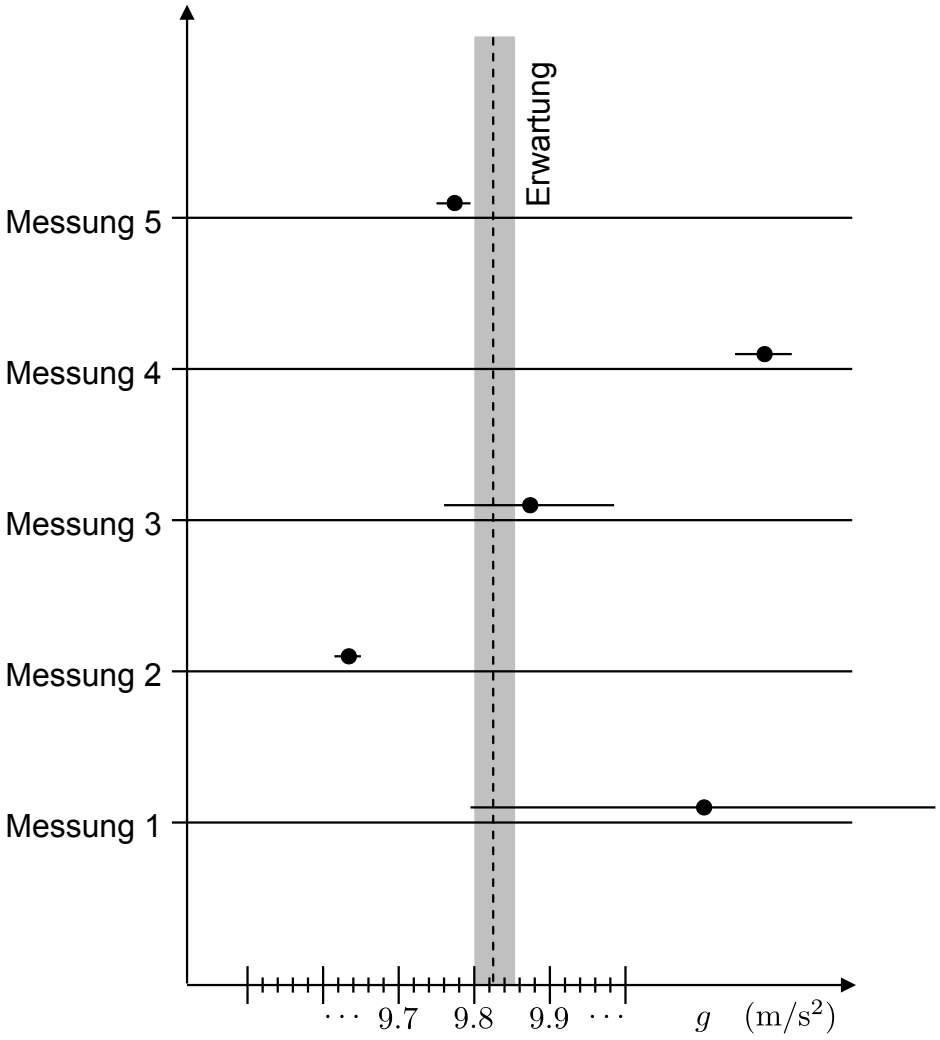


$$U = (13.06 \pm 0.005)\,\mathrm{V}$$
$$\oplus \text{ Angaben aus Datenblatt}$$
$$\oplus \text{ Anzeigefluktuationen}$$



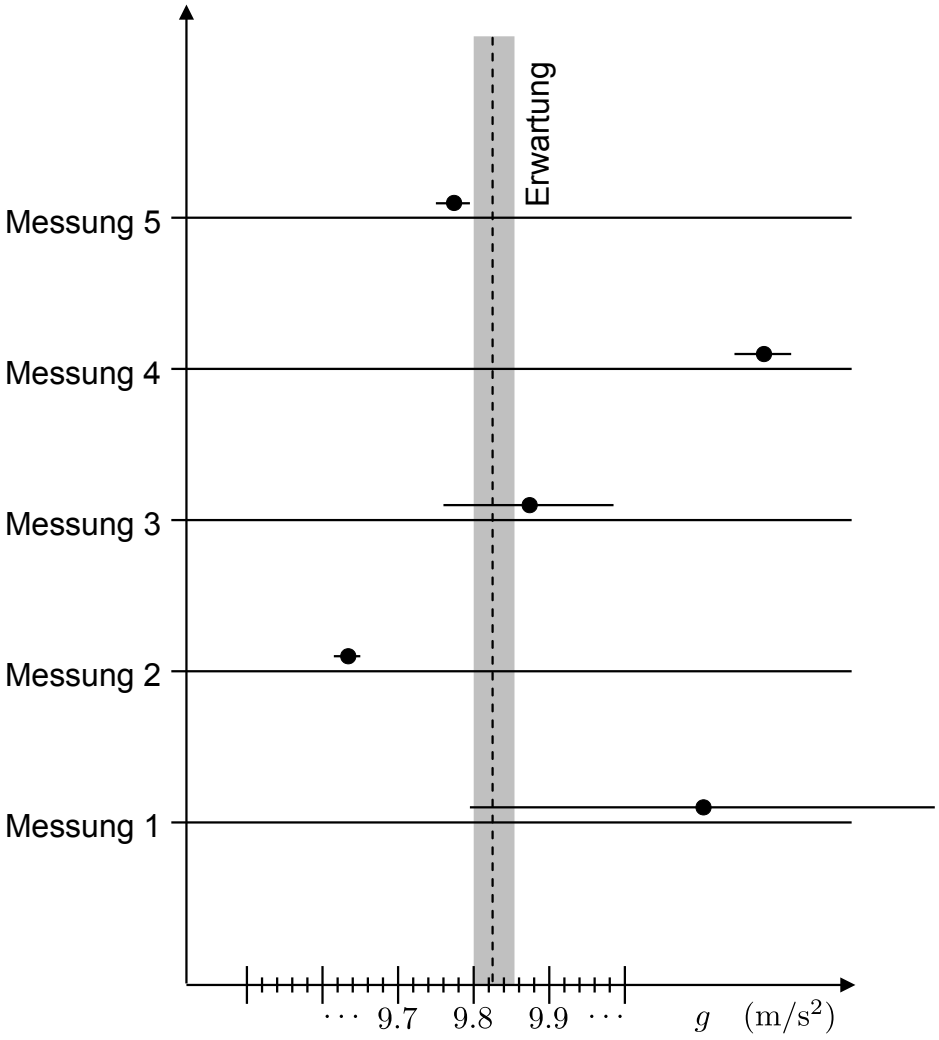
$$U = (4.0 \pm 0.2)\,\mathrm{V}$$
$$\oplus \text{ Ablesegenauigkeit}$$

Verträglichkeit zweier Messungen



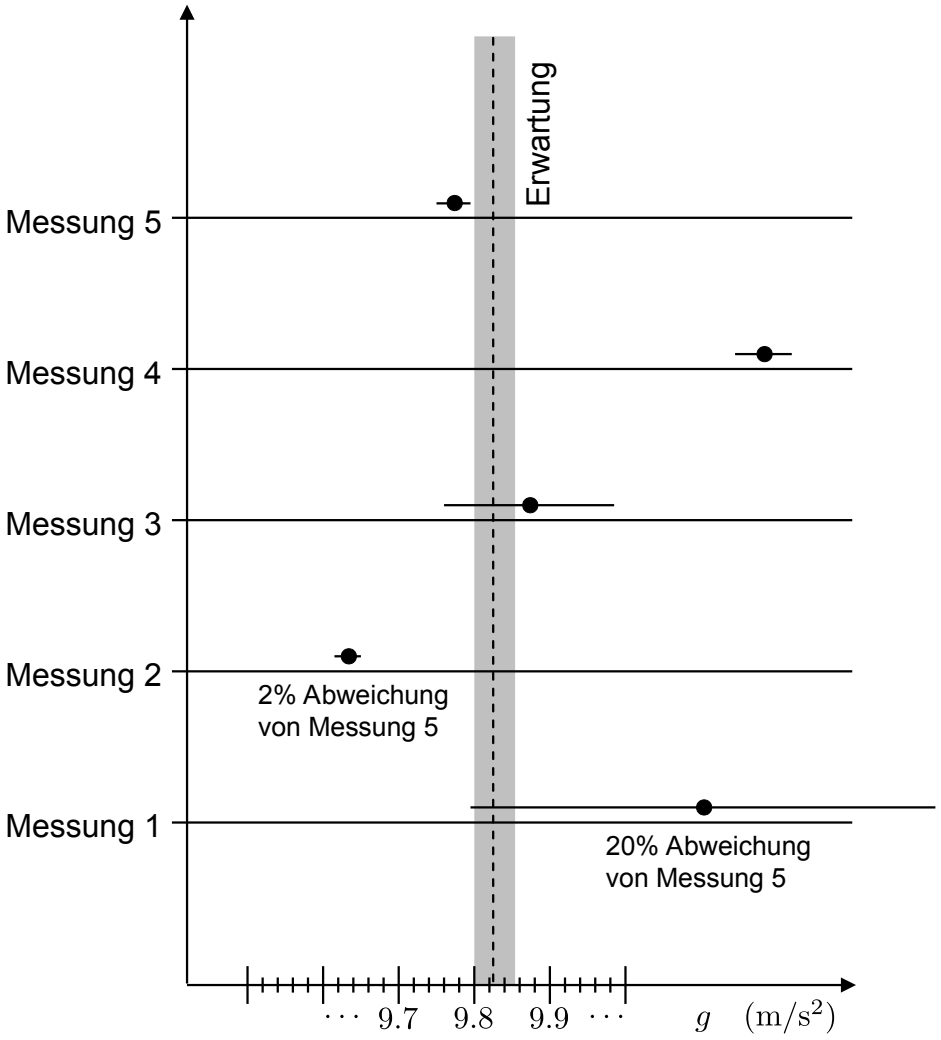
- Welche Messung(en) halten Sie für gut?

Verträglichkeit zweier Messungen



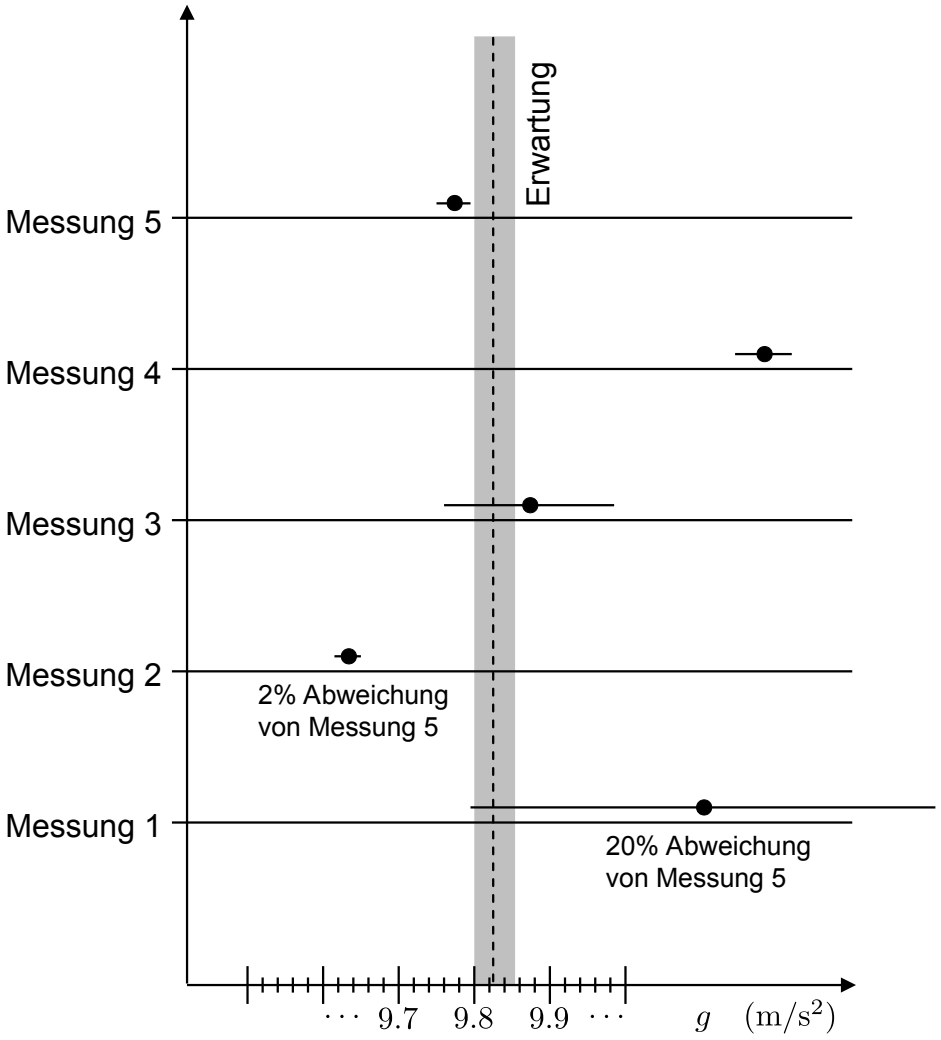
- Welche Messung(en) halten Sie für gut?
- Welche Messungen halten Sie für **verträglich mit der Erwartung**?

Verträglichkeit zweier Messungen



- Welche Messung(en) halten Sie für gut?
- Welche Messungen halten Sie für **verträglich mit der Erwartung**?
- Welche Messungen halten Sie für **verträglich miteinander**?

Verträglichkeit zweier Messungen



- Welche Messung(en) halten Sie für gut?
- Welche Messungen halten Sie für **verträglich mit der Erwartung**?
- Welche Messungen halten Sie für **verträglich miteinander**?
- Wie also beurteilen Sie Verträglichkeit?

Pull/Spannung

- Wir betrachten zwei unabhängige Messungen der gleichen Größe als **verträglich oder kompatibel**, wenn ihre Differenz mit 0 kompatibel ist:

$$f(x_0, x_1) = x_0 - x_1;$$

$$\Delta\hat{f} = \sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2},$$

- **Wir bestimmen die Kompatibilität zweier Messungen IMMER relativ zu den angegebenen Unsicherheiten**.

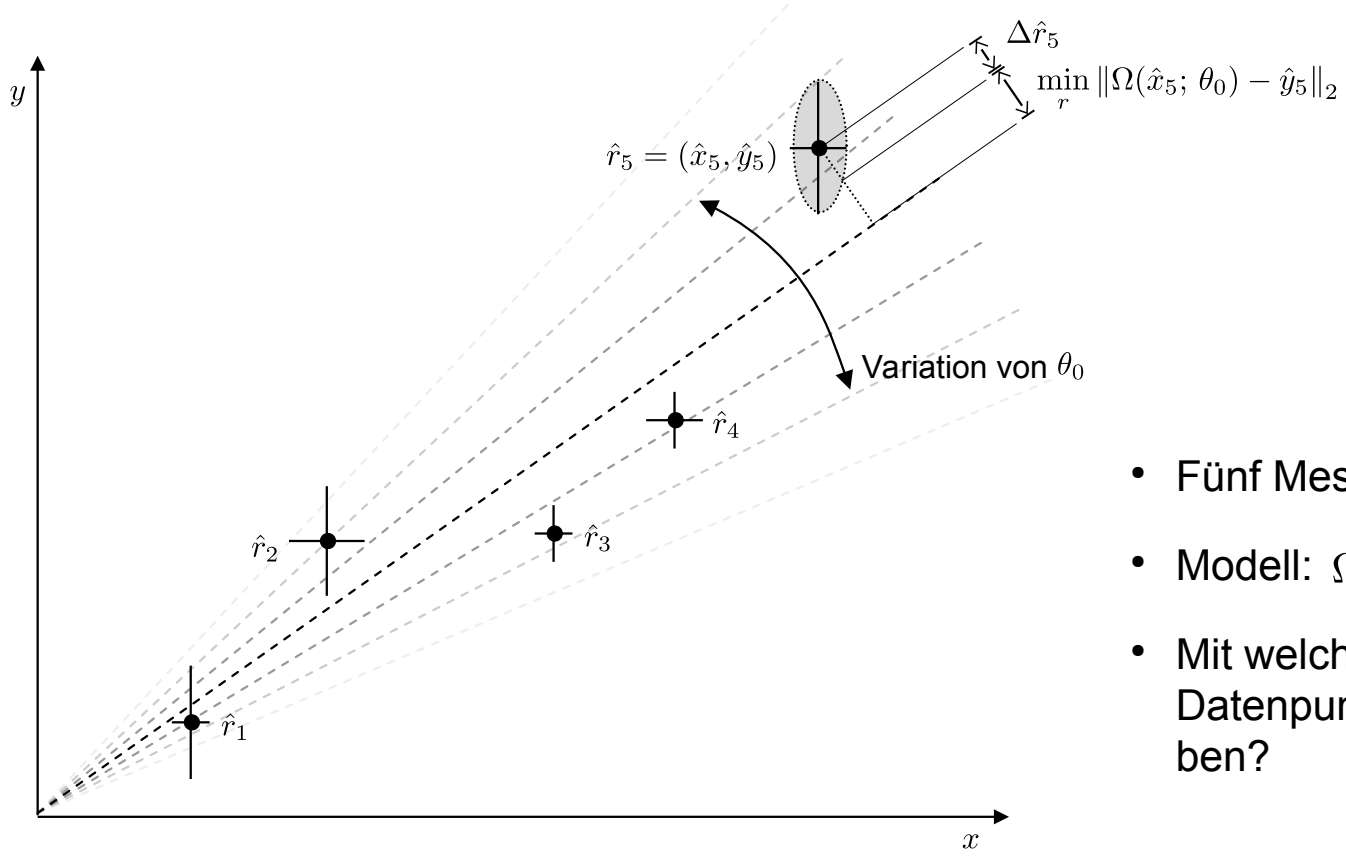
- Die Größe

$$\delta(\hat{x}_0, \hat{x}_1) \equiv \frac{\hat{x}_0 - \hat{x}_1}{\sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2}}$$

bezeichnen wir als **Spannung/Pull** zwischen den Messungen $\hat{x}_0$ und $\hat{x}_1$

Bestimmung von Modellparametern

Zelle 9 [iypnb]



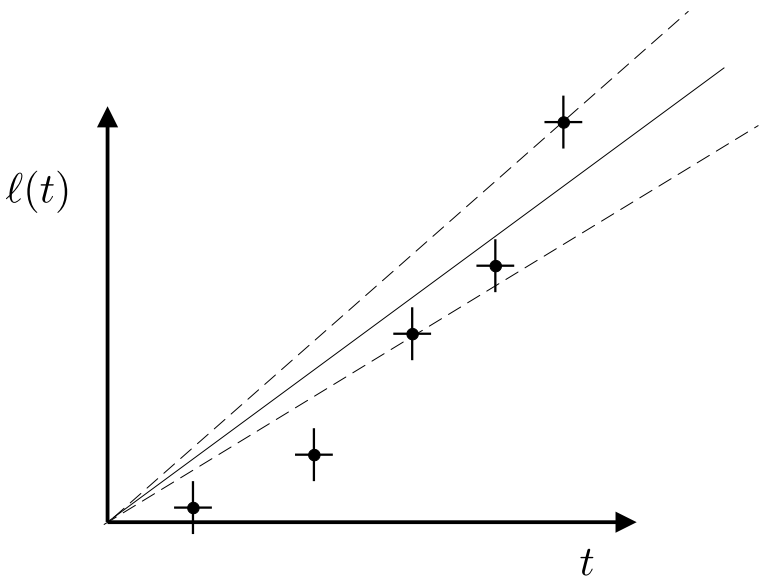
- Fünf Messpunkte $\hat{r}_i = (\hat{x}_i; \hat{y}_i)$
- Modell: $\Omega : y = \theta_0\, x$
- Mit welchem Wert $\hat{\theta}_0$ kann Ω die Datenpunkte **am besten** beschreiben?

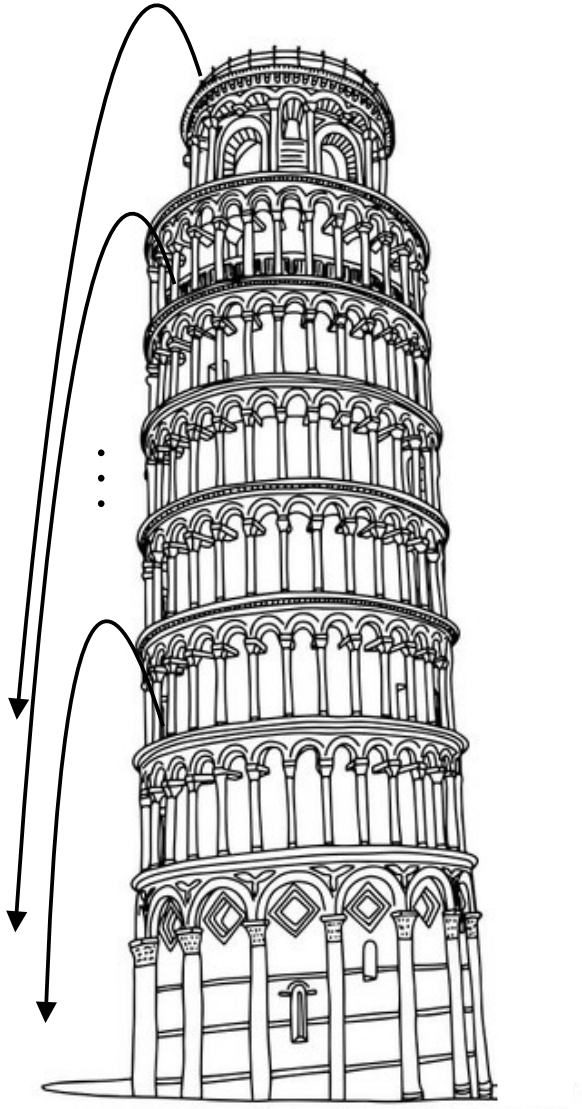
$$z\left(\theta_0;\, r, \{\hat{r}_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\min_r \left\| \Omega(r;\, \theta_0) - \hat{r}_i \right\|_2}{\Delta\hat{r}_i}}_{\equiv\, \delta(\Omega, \hat{r}_i)} \right)^2$$

Minimiere Quadratsumme der Spannung zwischen Modell und Datenpunkten

Priv.-Doz. Dr. Roger Wolf
https://etpwww.etp.kit.edu/~rwolf/

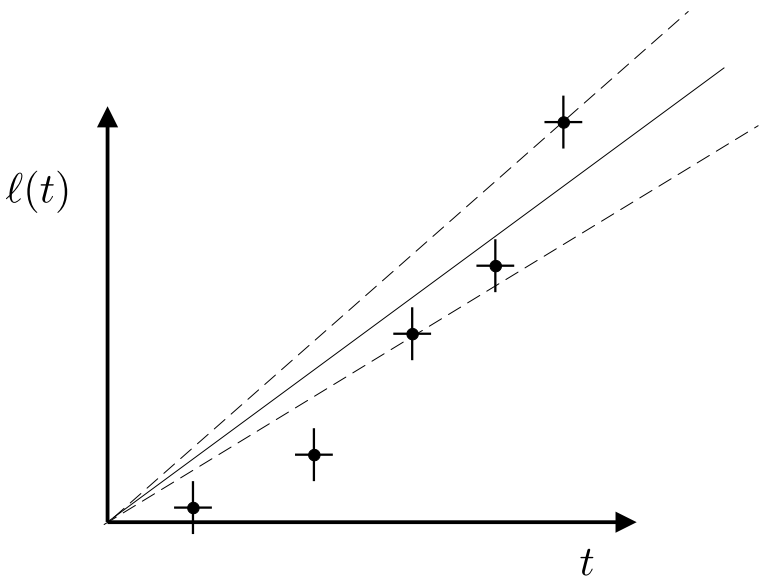
Anwendung auf den freien Fall

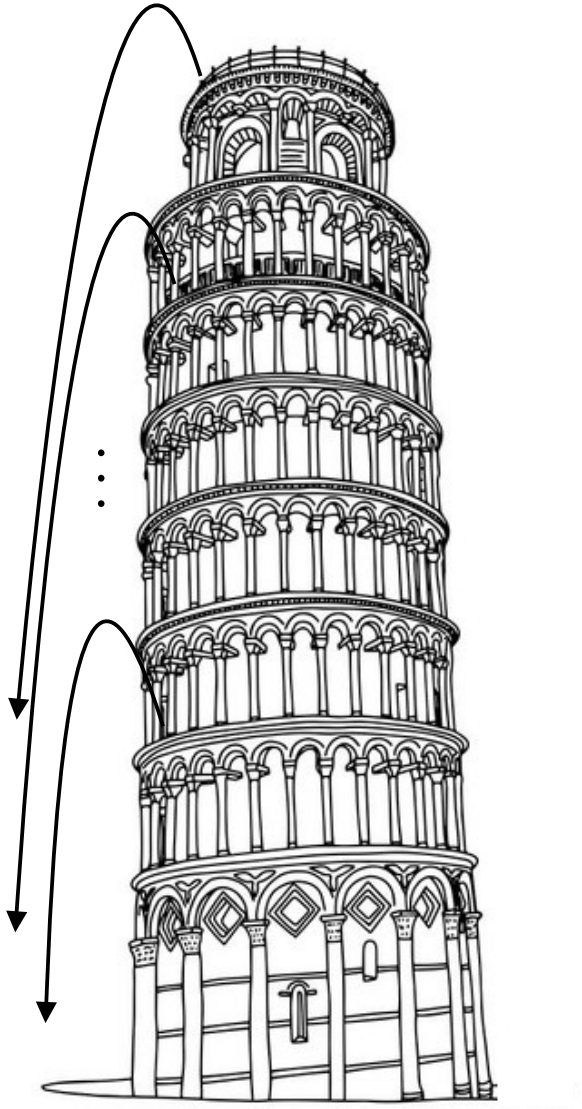




- Q: Wie groß ist die Steigung dieser Geraden?

Anwendung auf den freien Fall

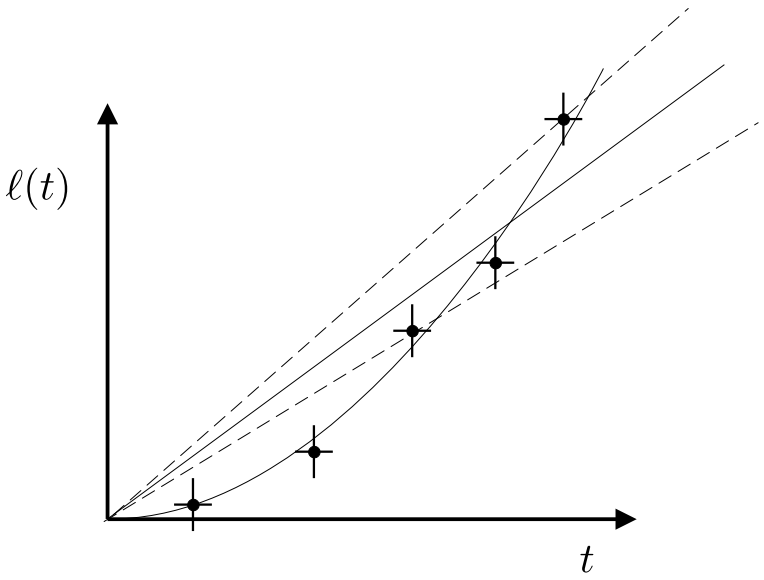


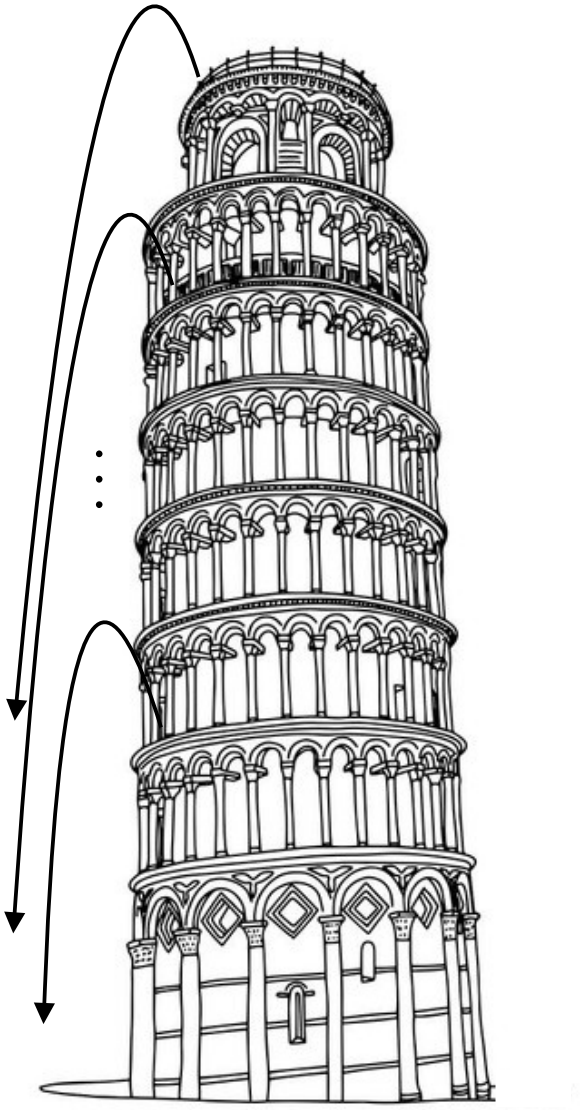


- Q: Wie groß ist die Steigung dieser Geraden? – **Falsche Frage!**

Anwendung auf den freien Fall

$$\ell = \frac{1}{2} g\, t^2$$

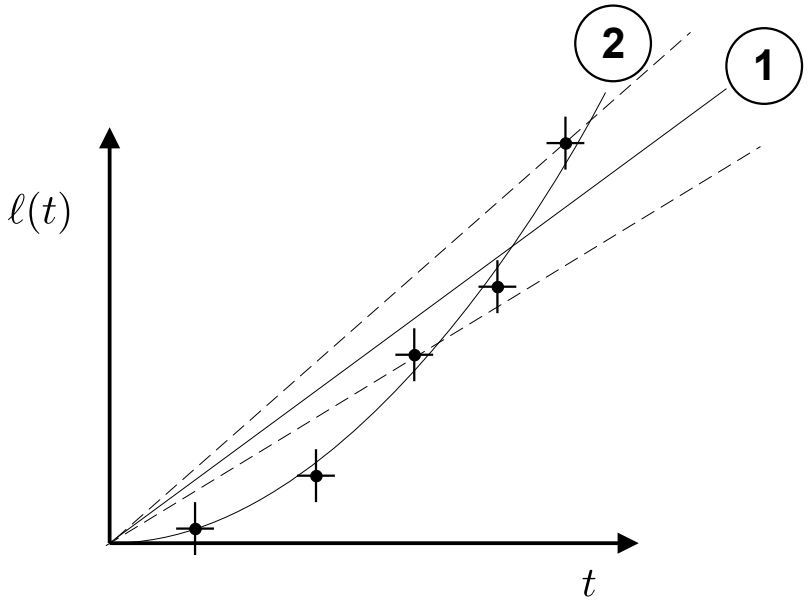




- Q: Wie groß ist die Steigung dieser Geraden? – **Falsche Annahme!**

χ^2-Test

- **Wie kompatibel ist mein Modell** selbst bei optimaler Wahl der Parameter mit den Daten?
- Quantifiziert durch den Wert von $\hat{z}\left(\theta_0, \{x_i\}; \{\hat{y}_i\}\right)$ im Minimum



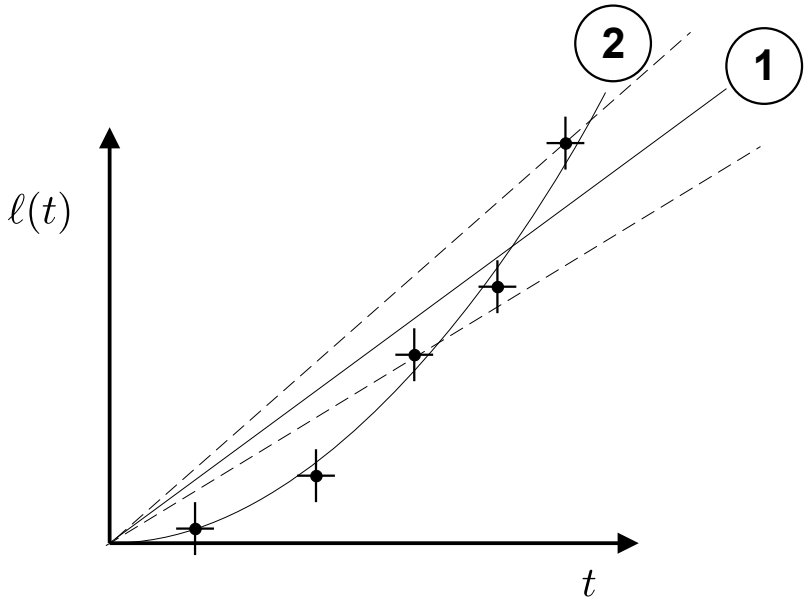
(1) $\hat{z}^{(1)}\left(\theta_0, \{x_i\}; \{\hat{y}_i\}\right) = 7.35$

(2) $\hat{z}^{(2)}\left(\theta_0, \{x_i\}; \{\hat{y}_i\}\right) = 4.05$

Welches Modell ist besser mit den Daten kompatibel?

χ^2-Test

- **Wie kompatibel ist mein Modell** selbst bei optimaler Wahl der Parameter mit den Daten?
- Quantifiziert durch den Wert von $\hat{z}\left(\theta_0, \{x_i\}; \{\hat{y}_i\}\right)$ im Minimum



1 $\hat{z}^{(1)}\left(\theta_0, \{x_i\}; \{\hat{y}_i\}\right) = 7.35$

2 $\hat{z}^{(2)}\left(\theta_0, \{x_i\}; \{\hat{y}_i\}\right) = 4.05$

Welches Modell ist besser mit den Daten kompatibel?

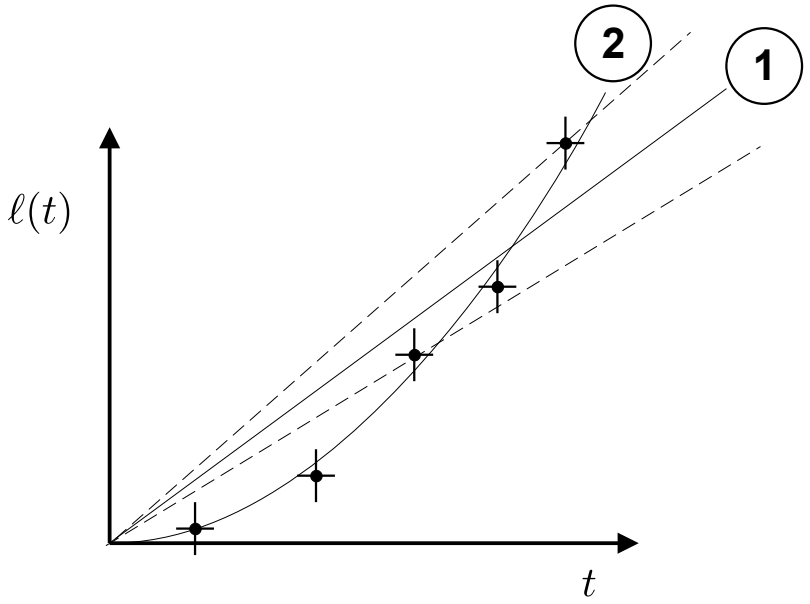
Für ein festgelegtes Modell mit $N(=5)$ Datenpunkten gibt

$$\hat{z}/N$$

die **mittlere Spannung pro Datenpunkt im Quadrat** an!

χ^2-Test – Freiheitsgrad

- Enthält ein Modell freie Parameter muss N auf die **Anzahl der Freiheitsgrade (α)**, die zur Anpassung zur Verfügung stehen reduziert werden



1 Durch zwei Punkte wird eine Gerade in der Ebene festgelegt.

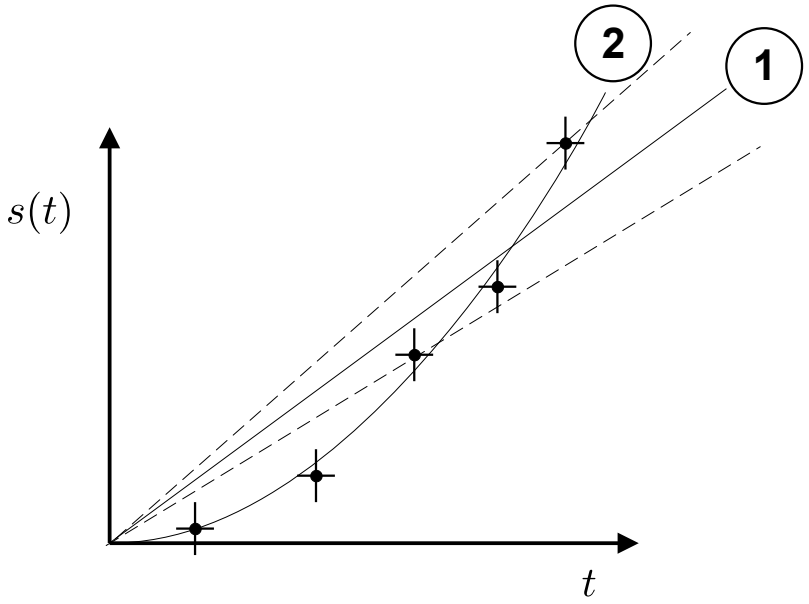
2 Durch drei Punkte eine Parabel.

Freiheitsgrad

$$\alpha = \Big(\#\ \text{Punkte} - \#\ \text{Parameter}\Big)$$

χ^2-Test

- **Angewand auf unser Beispiel:**



1 $\hat{z}^{(1)}\left(\theta_0, \{x_i\}; \{\hat{y}_i\}\right)/\alpha = 1.84$

2 $\hat{z}^{(2)}\left(g, \{x_i\}; \{\hat{y}_i\}\right)/\alpha = 1.01$

Ist $\hat{z}/\alpha \gg 1$, dann ist das angepasste Modell nicht mit den Daten kommpatibel!

Für ein Modell mit α Freiheitsgraden gibt

$$\hat{z}/\alpha$$

die **mittlere Spannung pro Freiheitsgrad im Quadrat** an!

The end…


Mit diesem Rüstzeug sollten Sie gut fürs P1-Praktikum gewappnet sein.
(c) karlsruhe-insider.de

Backup

Was macht wissenschaftliches Messen aus?



Was macht wissenschaftliches Messen aus?





… Reproduzierbarkeit

Interpretation von $g \pm \Delta g$

- Mit 68% Wahrscheinlichkeit liegt der Messpunkt **im Intervall** $[\mathbf{g} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{g}; \mathbf{g} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{g}]$ **um den wahren Wert** $\mathbf{g}$ ($\rightarrow$ Inklusionsschluss)
- Mit 68% Wahrscheinlichkeit überdecken ein **Messwert** $\hat{\mathbf{g}}$ **den wahren Wert** $\mathbf{g}$ **mit den Vertauensintervall** $[\hat{\mathbf{g}} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{g}; \hat{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{g}]$ ($\rightarrow$ Repräsentationsschluss)

Pull/Spannung (continued)

- Wenn Ihre Messung normalverteilt ist und Sie Ihre Unsicherheiten richtig als $x \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ Intervalle abgeschätzt haben ist die Größe

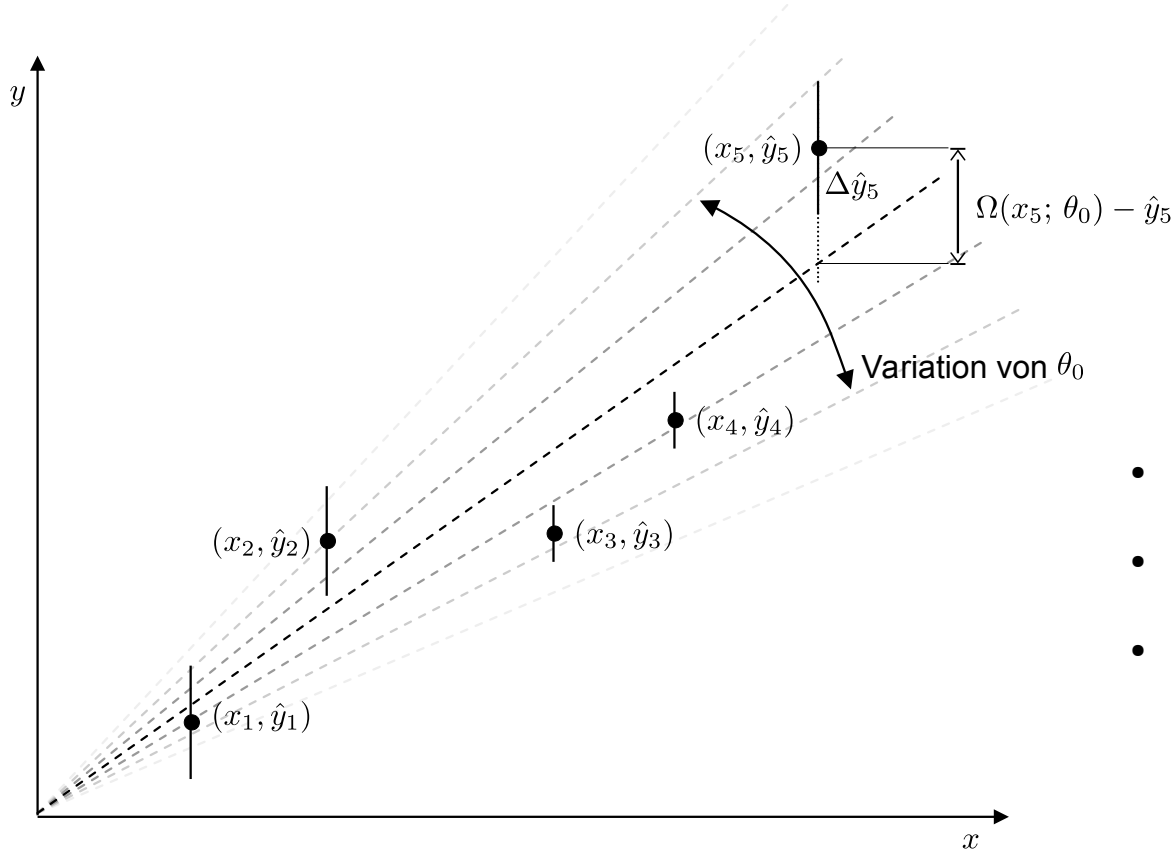
$$\delta(\hat{x}_0, \hat{x}_1) \equiv \frac{\hat{x}_0 - \hat{x}_1}{\sqrt{\Delta\hat{x}_0^2 + \Delta\hat{x}_1^2}}$$

nach einer Standardnormalverteilung $\varphi(\delta, 0, 1)$ verteilt!

Wenn $\hat{x}_0$ und $\hat{x}_1$ WIRKLICH kompatibel sind, dann gilt:

- $\delta \in [-1; 1]$ mit **68%** Wahrscheinlichkeit
- $\delta \in [-2; 2]$ mit **95%** Wahrscheinlichkeit
- $\delta \in [-3; 3]$ mit **99%** Wahrscheinlichkeit

Bestimmung von Modellparametern



Analytisch lösbar

- Fünf Messpunkte $\hat{r}_i = (\hat{x}_i; \hat{y}_i)$
- Modell: $\Omega : y = \theta_0\, x$
- Mit welchem Wert $\hat{\theta}_0$ kann Ω die Datenpunkte am besten beschreiben?

$$z\left(\theta_0, \{x_i\};\, \{\hat{y}_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\Omega(x_i;\theta_0) - \hat{y}_i}{\Delta\hat{y}_i}}_{\equiv\, \delta(\Omega, \hat{y}_i)} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta_0\, x_i - \hat{y}_i}{\Delta\hat{y}_i} \right)^2$$

Minimiere Spannung zwischen Modell und Datenpunkten